Sommaire

1. Intégration d'une fonction continue sur $[a, b]$

1.1. Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Théorème : (de Darboux)
Toute application continue sur un intervalle admet une primitive de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle.

Ce théorème est admis.

Définition : f continue sur $[a, b]$, à valeur dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). F une primitive de f,
on appelle **intégrale de f sur** $[a, b]$: $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$

Il n'est pas nécessaire d'avoir $a < b$, et on a immédiatement : $\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

1.2. Interprétation géométrique

L'intégrale simple sur $[a, b]$ de f est l'aire **algébrique** entre le graphe de f et l'axe des abscisses.

- Quand la fonction est positive, comme sur la figure 1, page suivante, l'aire algébrique se confond avec l'aire géométrique, c'est à dire l'aire hachurée.
- Quand la fonction est de signe variable, comme sur la figure 2, page suivante, l'aire algébrique est la différence des aires géométriques au dessus et en dessous de l'axe des abscisses, c'est à dire des aires hachurées.

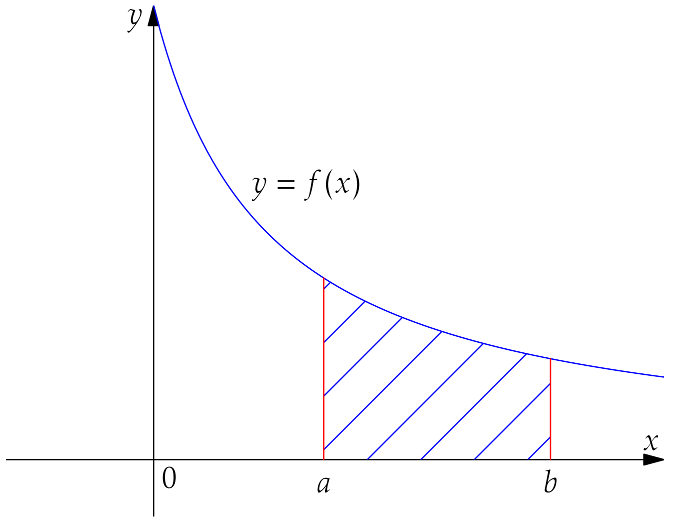

Figure 1 – **L'intégrale simple d'une fonction positive est l'aire hachurée**

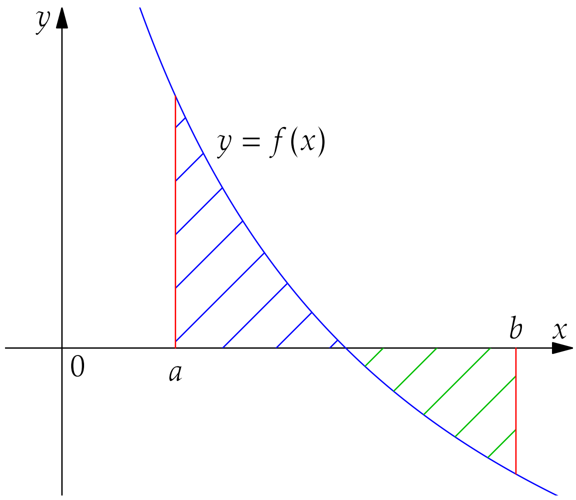

Figure 2 – **L'intégrale est la différence des aires hachurées en bleu et vert**

1.3. Calcul approché d'intégrales et sommes de Riemann

On va faire un calcul approché de la valeur d'une intégrale de f sur $[a, b]$ en divisant l'intervalle $[a, b]$ en n parties égales. Les bornes de ces parties sont donc $a + k\dfrac{b-a}{n}$ pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Sur chacun de ces intervalles de largeur $\dfrac{b-a}{n}$: $\left[a + (k-1)\dfrac{b-a}{n}, a + k\dfrac{b-a}{n}\right]$, définis pour $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on approxime la fonction par la valeur à une de ses deux bornes. Ce qui donne :

Théorème : f continue sur $[a, b]$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Si de plus f est monotone, une figure montre facilement que l'une des deux sommes est un majorant, l'autre un minorant de l'intégrale. Enfin, quand $[a, b] = [0, 1]$, on obtient des sommes particulières appelées sommes de Riemann :

Théorème : f continue sur $[0, 1]$, alors : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$

Exemple : Cherchons $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2 + k^2}$

On écrit : $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2 + k^2} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{k}{n}\right)^2}$ et on reconnait une somme de Riemann pour la fonction f définie par $f(t) = \dfrac{1}{1 + t^2}$ sur $[0, 1]$. On a bien une fonction continue sur $[0, 1]$.

La somme converge donc vers $\int_0^1 \dfrac{1}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{4}$.

1.4. Propriétés

a/ Linéarité

Théorème : $f, g : [a, b] \to \mathbb{K}$, intégrables sur $[a, b]$, $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b (f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

b/ Conjugaison

Théorème : $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, intégrable sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b \overline{f}(t)\,\mathrm{d}t = \overline{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$$

c/ Relation de Chasles

Théorème : $f : [a, b] \cup [a, c] \cup [c, b] \to \mathbb{K}$, intégrable, alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration : Ces théorèmes se montrent facilement en prenant F et G des primitives de f et g et en remarquant que $\overline{\mathrm{F}}$ est une primitive de $\overline{f}$. ∎

Exemple : Calculons $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{t + \mathrm{i}}$ qui est bien l'intégrale d'une fonction continue sur $[0, 1]$.

Attention, le logarithme n'est défini que sur $\mathbb{R}_+^*$, ceci nous oblige à séparer la partie réelle et la partie imaginaire.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+\mathrm{i}} = \int_0^1 \frac{t-\mathrm{i}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - \mathrm{i}\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$
$$= \left[\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)\right]_0^1 - \mathrm{i}\left[\arctan(t)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2) - \mathrm{i}\frac{\pi}{4}.$$

1.5. Inégalités

a/ Croissance

Théorème : $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, intégrable sur $[a, b]$, positive sur $[a, b]$, $a < b$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$

Démonstration : Sur chaque $[a_{i-1}, a_i]$, F_i est croissante car de dérivée positive, d'où le résultat. ■

b/ Théorème de l'intégrale nulle

Théorème : $f : [a, b] \to \mathbb{R} : \left\{\begin{array}{l} f \textbf{ continue} \text{ sur } [a, b], \\ \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall t \in [a, b],\ f(t) = 0$

Démonstration : F, une primitive de $|f|$, est croissante vérifiant $F(b) = F(a)$, donc F est constante, de dérivée $|f|$ nulle sur l'intervalle, et donc, f est nulle sur l'intervalle. ■

c/ Majoration en valeur absolue

Théorème : $a < b$,
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, intégrable sur $[a, b]$, alors $|f|$ est intégrable sur $[a, b]$, et :
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Démonstration : On définit $f_+(t) = \max(f(t), 0)$ et $f_-(t) = \max(-f(t), 0)$, deux fonctions positives, on a $f(t) = f_+(t) - f_-(t)$ et $|f(t)| = f_+(t) + f_-(t)$
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f_+(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f_-(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b f_+(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f_-(t)\,\mathrm{d}t,$$
ce qui assure le résultat car ces deux intégrales sont positives. ■

d/ Majoration en module

Théorème : $a < b$,
$f : [a, b] \to \mathbb{C}$, intégrable sur $[a, b]$, alors $|f|$ est intégrable sur $[a, b]$, et :
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Démonstration : Admis. ■

e/ Première inégalité de la moyenne

Théorème : $a < b$

$f : [a, b] \to \mathbb{K}$, intégrable sur $[a, b]$, alors : $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a) \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$

Démonstration : $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|\,\mathrm{d}t = (b-a) \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$ ■

f/ Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème : $a < b$, $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, intégrables sur $[a, b]$, alors :

$$\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\,\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

Démonstration :

$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))^2\,\mathrm{d}t = \lambda^2 \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t + 2\lambda \int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ pour tout λ,

d'où $\dfrac{\Delta}{4} = \left(\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 - \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$ qui permet de conclure. ■

2. Dérivation et Intégration

2.1. Changement de variables

Théorème : f continue sur $[a, b]$, φ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$, avec $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$, alors

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\,\mathrm{d}u$$

> Le changement de variable est donc $u = \varphi(t)$ dont on vérifiera qu'il est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle de variation de t.

Démonstration : Si F est une primitive de f, alors $\mathrm{F} \circ \varphi$ est une primitive de $(f \circ \varphi) \times \varphi'$, d'où

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}\circ\varphi(\beta) - \mathrm{F}\circ\varphi(\alpha) = \mathrm{F}(\varphi(\beta)) - \mathrm{F}(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\,\mathrm{d}u$$ ■

Exemple : Calculons $\int_0^{\pi/2} \dfrac{1}{1+\cos t}\,\mathrm{d}t$ qui est bien l'intégrale d'une fonction continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Comme on le verra dans la suite, on pose $u = \tan \dfrac{t}{2}$,

ce qui donne $\cos t = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\mathrm{d}t = \dfrac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2}$, on n'oublie pas de changer les bornes,

et on obtient $\int_0^{\pi/2} \dfrac{1}{1+\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \dfrac{1}{1+\dfrac{1-u^2}{1+u^2}} \times \dfrac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_0^1 \mathrm{d}u = 1.$

Les calculs ne s'arrangeront pas toujours aussi bien !

2.2. Inégalité des accroissements finis

Théorème : $f : [a, b] \to \mathbb{K}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$, $a < b$ et k tel que $\sup\limits_{t\in[a,b]} |f'(t)| \leqslant k$, alors :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant k(b - a)$$

Démonstration : Appliquer l'inégalité de la moyenne à f'. ■

2.3. Formules de Taylor

Les formules de Taylor sont toujours de la forme :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \mathrm{R}_n(x)$$

Le problème est alors de déterminer une valeur de $\mathrm{R}_n(x)$, un majorant de $|\mathrm{R}_n(x)|$ ou un ordre de grandeur d'un tel majorant.

a/ Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème : Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a, x]$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration : Pour $n = 0$, $\displaystyle\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(a)$ permet de conclure. On amorce donc une récurrence. On admet le résultat au rang n, une simple intégration par parties sur le reste donne :

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

qui fournit immédiatement le résultat au rang $n+1$. ■

> Cette dernière formule de Taylor permet d'obtenir des majorations de :
> $\left|f(x) - \left(f(0) + xf'(0) + \dfrac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)\right)\right|$ en majorant le plus souvent $\left|f^{(n+1)}(t)\right|$.

b/ Formule de Taylor-Young

Théorème : Si f est n fois dérivable au voisinage de a,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \mathrm{o}((x-a)^n)$$

avec $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\mathrm{o}((x-a)^n)}{(x-a)^n} = 0$

Démonstration : On le montre en supposant que f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ au voisinage de a. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne, en appelant M un majorant de $\left|f^{(n+1)}(t)\right|$ sur un intervalle, voisinage de a,

$$\left|f(x) - \left(f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right)\right| \leqslant |x-a|^n \frac{|x-a|\,\mathrm{M}}{(n+1)!}$$

Or $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{|x-a|\,\mathrm{M}}{(n+1)!} = 0$ assure le résultat. ■

2.4. Intégration et étude locale

Théorème : $f, g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, intégrables sur I, $a \in \mathrm{I}$, g de signe constant à gauche et à droite de a, alors

$$f(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}(g(x)) \Rightarrow \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{a}{=} \mathrm{o}\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \Rightarrow \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{a}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

3. Recherche de primitives

Les méthodes générales ne sont pas toujours les meilleures...

Regardons par exemple $\displaystyle\int \frac{8t^7}{t^8+1}\,\mathrm{d}t$!... Si la technique de terminale fonctionne, il faut l'utiliser...

3.1. Fraction rationnelle en x (ou en $t\ldots$)

On décompose la fraction rationnelle selon les indications de l'énoncé :

- les termes en $\dfrac{1}{x-a}$, s'intègrent en $\ln|x-a|$
- les termes en $\dfrac{1}{(x-a)^p}$, s'intègrent en $\dfrac{1}{1-p} \times \dfrac{1}{(x-a)^{p-1}}$
- les termes en $\dfrac{ax+b}{x^2+px+q}$, avec $\Delta < 0$, s'intègrent en l'écrivant : $\dfrac{\frac{a}{2}\times(2x+p)}{x^2+px+q} + \dfrac{\left(b-\frac{a}{2}p\right)}{x^2+px+q}$.

  On obtient :
  - un $\ln\left(x^2+px+q\right)$ pour le terme : $\dfrac{\frac{a}{2}\times(2x+p)}{x^2+px+q}$ de la forme $\dfrac{u'}{u}$ et
  - un arctan pour le terme : $\dfrac{\left(b-\frac{a}{2}p\right)}{x^2+px+q}$.

3.2. Fractions rationnelles diverses

Le but du changement de variable donné est à chaque fois d'obtenir une fraction rationnelle classique.

- Fraction rationnelle en e^x, $\mathrm{ch}x$, $\mathrm{sh}x$

  Poser $u = \mathrm{e}^x$
- Fraction rationnelle en x et $\sqrt{ax+b}$

  Poser $u = \sqrt{ax+b}$
- Fraction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$
  - on regarde si l'élément différentiel $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariant quand on change
    - x en $-x$, poser alors : $u = \cos x$
    - x en $\pi - x$, poser alors : $u = \sin x$
    - x en $\pi + x$, poser alors : $u = \tan x$

- en cas d'échec, poser $u = \tan\dfrac{x}{2}$, on a alors :

$$\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2} \quad ; \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2} \quad ; \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad ; \quad \tan x = \frac{2u}{1-u^2}$$

3.3. Polynôme × exponentielle

Intégrer par parties ou chercher une primitive de la même forme avec un polynôme du même degré.

3.4. Primitives usuelles

On consultera le tableau 1, page ci-contre. Notons qu'une primitive n'a de sens que sur un intervalle.

Tableau 1 – Primitives usuelles

Primitives simples		
Fonction	Primitive	Remarques
x^a	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1} + \mathrm{C}$	Sauf pour $a = -1$, sur $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}^*$, ou $\mathbb{R}_+^*$ selon le cas
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + \mathrm{C}$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x+a}$	$\ln\lvert x+a\rvert + \mathrm{C}$	Sur un intervalle ne contenant pas $-a$
$\dfrac{1}{x^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + \mathrm{C}$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + \mathrm{C}$	Sur un intervalle de $]-1, 1[$. Ou bien $-\arccos x + \mathrm{C}'$
e^x	$\mathrm{e}^x + \mathrm{C}$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + \mathrm{C}$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + \mathrm{C}$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + \mathrm{C}$	Sur un intervalle de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[+ k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + \mathrm{C}$	Sur un intervalle de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[+ k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x + \mathrm{C}$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x + \mathrm{C}$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
Utilisation de fonctions composées		
Fonction	Primitive	Remarques
$u'\, u^n$	$\frac{1}{n+1}\, u^{n+1}$	Sur un intervalle où u est de classe $\mathscr{C}^1$, $n \neq -1$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	Sur un intervalle où u est de classe $\mathscr{C}^1$, $u(x) \neq 0$
$\dfrac{u'}{u^n}$	$\frac{1}{1-n}\,\dfrac{1}{u^{n-1}}$	Sur un intervalle où u est de classe $\mathscr{C}^1$, $u(x) \neq 0$, $n \neq 1$
$\dfrac{u'}{a^2+u^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{u}{a}$	Sur un intervalle où u est de classe $\mathscr{C}^1$