Dans un premier temps, on désire intégrer numériquement une application f continue sur $[a,b]$; c'est à dire calculer une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, appelée u_n, par la méthode des trapèzes, en découpant l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles de même longueur.

Par la suite, on cherchera à améliorer le procédé.

1) Montrer que :

$$u_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

2) **a)** Ecrire une procédure appelée `Trapeze1` à 4 paramètres f,a,b,n qui calcule u_n **en utilisant** la fonction maple `sum`.

b) Ecrire une procédure appelée `Trapeze2` à 4 paramètres f,a,b,n qui calcule u_n **sans utiliser** la fonction maple `sum`.

On admet maintenant que :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = u_n + \frac{K}{n^2} + \frac{L}{n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

avec K et L qui ne dépendent que de f,a,b.

3) Déterminer une suite (v_n) où v_n ne dépend que de u_n et u_{2n} telle que :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = v_n + \frac{L'}{n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

avec L' qu'on déterminera en fonction de L.

4) Déterminer une formule équivalente à celle de la première question pour v_n. On trouvera :

$$v_n = \frac{b-a}{6n}\left(f(a)+f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{2k+1}{2}\,\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

5) Ecrire des procédures `Integrale1` et `Integrale2` respectant les consignes de la deuxième question pour v_n au lieu de u_n.

6) En commençant avec la fonction `sinus` entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ et $n=5$, on comparera la précision du calcul de u_{2n} et de v_n sur des exemples.

7) Montrer que le calcul de v_n revient à changer, dans le calcul de u_n, le segment de droite du trapèze par un arc de parabole coincidant avec le graphe de f aux extrémités et au milieu du segment.
On montrera pour cela que pour une fonction polynomiale du second degré g :

$$\int_\alpha^\beta g(t)\,\mathrm{d}t = (\beta-\alpha)\,\frac{g(\alpha)+g(\beta)+4\,g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{6}$$