Nous allons ici étudier et tracer les sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction périodique.

On considère une application g impaire, périodique de période T, définie par la fonction f sur $\left]0,\frac{T}{2}\right[$, continue par morceaux sur cet intervalle et à valeurs réelles.

1) Montrer que $g\left(0\right) = g\left(\frac{T}{2}\right) = 0$.

2) Ecrire une procédure `B` à 3 paramètres `f,T,n` qui calcule une valeur approchée du coefficient b_n de la série de Fourier de g.

3) Ecrire deux procédures `SomPart1` et `SomPart2` qui calculent la somme partielle Sn jusqu'au rang n de la série de Fourier de g ; respectivement en utilisant et sans utiliser la fonction Maple `sum`.

4) Ecrire une procédure `g` à 3 paramètres `f,T,t` qui détermine selon les intervalles la valeur de g sur $\left[-\frac{3T}{4},\frac{3T}{4}\right]$.
Notons que pour tracer une telle fonction $t \rightarrow g(f,T,t)$, il faudra donner effectivement f et T, et, de plus, écrire « `'g(f,T,t)'` » au lieu de l'habituel `g(f,T,t)`. Ce dernier point pour des raisons internes à Maple qui n'ont pas d'intérêt ici.

5) Ecrire une procédure `Dessine` à 3 paramètres `f,T,n` qui trace sur un même graphe la représentation de g et de Sn sur l'intervalle $\left[-\frac{3T}{4},\frac{3T}{4}\right]$.

On admet maintenant que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{T/2} \Big(f(t) - Sn(t)\Big)^2 \,\mathrm{d}t = 0$$

6) Ecrire une procédure `Rang` à 3 paramètres `f,T,e` qui calcule le premier rang n tel que :

$$\int_0^{T/2} \Big(f(t) - Sn(t)\Big)^2 \,\mathrm{d}t \leqslant e$$

7) Pour voir si on a bien défini g, on tracera son graphe quand f est périodique de période 2, valant $t+1$ sur $]0,1[$.

8) On essaiera enfin ces procédures avec $n = 5$ et :
- f de période 2 valant 1 sur $]0,1[$;
- f de période 2 valant $t(1-t)$ sur $]0,1[$.

Pour `rang` et la première fonction, on prendra $e = 0.05$, tandis que pour la seconde fonction, on prendra $e = 0.000001$.