Nous allons ici tracer las solutions approchées d'une équation différentielle du premier ordre du type :
$y' = F(x, y)$, avec la condition initiale : $y_0 = y(x_0)$.
On ne se pose aucun problème quant à l'existence et l'unicité des solutions.

1 Un peu de Maple

1.1 Des listes

Maple peut manipuler des listes comme : `[[X,Y],[X',Y'], ...,[X",Y"]]`.
qu'on peut mettre dans une variable comme `Points`
L'opérateur `op(...)` ote les crochets extérieurs d'une liste,
ainsi : `Points :=[op(Points),[X,Y]]` ajoute un point à la liste de points `Points`...

1.2 Des graphes

`plot(Points)` engendre le graphe formé des segments de droites reliant les points successifs de `Points`.
Celui ci peut au besoin se mettre dans une variable comme `A` ou `B`...
On regardera aussi l'option `color=...` de `plot`.
Les couleurs usuelles sont `black, yellow, red, blue, green...`
`display([A,B])` trace le graphe simultané des 2 (ou 3...) graphes indiqués. Avoir choisi des couleurs permet de différencier les graphes.

2 Méthode d'Euler

2.1 La méthode avec un pas h

On part d'un point M de coordonnées (X_M, Y_M) appartenant à la solution approchée.
Le point suivant est le point E de coordonnées (X_E, Y_E), tel que $X_E = X_M + h$ et tel que le point E est sur la droite passant par M de pente $F(X_M, Y_M)$.

Voir la figure ci-dessous.

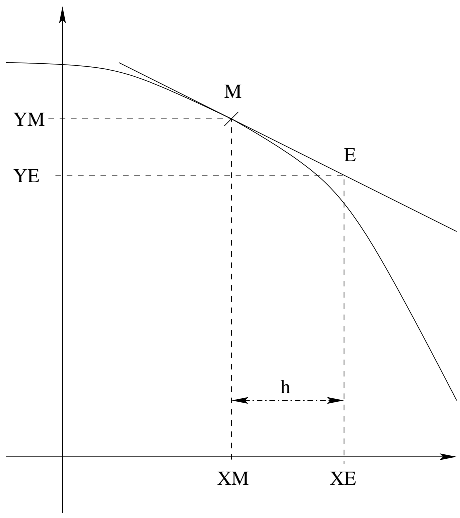

FIG. 1 – Méthode d'Euler

On itère le procédé en partant du point (X_0, Y_0) et en reprenant à chaque étape le point E comme nouveau point M, autant de fois qu'il le faut pour que X décrive l'intervalle demandé.

2.2 Questions

1) Calculer les coordonnées de E en fonction de celles de M, de F et de h.

2) Ecrire une procédure `Euler` à 5 paramètres : `F, X0, Y0, Xfin et n`,
qui calcule la liste des $n+1$ points de la solution approchée pour les paramètres donnés.

3) Tracer la solution approchée d'Euler pour l'équation différentielle $y' = x + y$ avec $(x_0, y_0) = (0, 1)$ sur $[0, 4]$ avec $n = 10$.

4) Tracer sur un même graphe la solution exacte et la solution approchée d'Euler.

3 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

3.1 La méthode avec un pas de h

En partant du point M appartenant à la solution approchée de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2, on construit d'abord le point d'Euler E.
On considère le point RK_1, milieu du segment (ME), de coordonnées (X_{RK_1}, Y_{RK_1}).
Le point suivant de la solution approchée est le point RK_2, de coordonnées (X_{RK_2}, Y_{RK_2}),
avec : $X_{RK_2} = X_E = X_M + h$, et qui, de plus, appartient à la droite passant par M et de pente $F(X_{RK_1}, Y_{RK_1})$

Voir la figure ci-dessous.

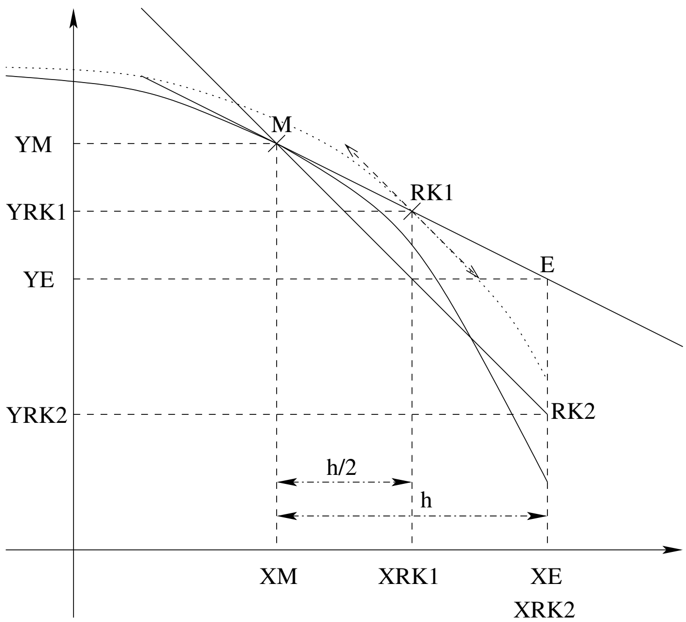

FIG. 2 – Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

On itère le procédé en partant du point (X_0, Y_0) et en reprenant à chaque étape le point E comme nouveau point M, autant de fois qu'il le faut pour que X décrive l'intervalle demandé.

3.2 Questions

1) Calculer les coordonnées de RK_2 en fonction de celles de M, de F et de h.

2) Ecrire une procédure `RK2` à 5 paramètres : `F, X0, Y0, Xfin et n`,
qui calcule la liste des $n+1$ points de la solution approchée pour les paramètres donnés.

3) Tracer la solution approchée de Runge-Kutta d'ordre 2 pour l'équation différentielle $y' = x + y$ avec $(x_0, y_0) = (0, 1)$ sur $[0, 4]$ avec $n = 10$.

4) Tracer sur un même graphe la solution exacte, la solution approchée d'Euler et la solution approchée de Runge-Kutta d'ordre 2.

4 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

4.1 La méthode avec un pas de h

A partir du point M, on construit les point $E,\ RK_1,\ RK_2$.
RK_3 est le milieu du segment (M, RK_2).
Le point suivant de la solution approchée est le point RK_4, de coordonnées (X_{RK_4}, Y_{RK_4}),
avec : $X_{RK_2} = X_E = X_M + h$, et qui, de plus, appartient à la droite passant par M et de pente :

$$\frac{1}{6}\Big(F(X_M, Y_M) + 2\,F\,(X_{RK_1}, Y_{RK_1}) + 2\,F\,(X_{RK_3}, Y_{RK_3}) + F\,(X_{RK_2}, Y_{RK_2})\Big)$$

Voir la figure ci-dessous.

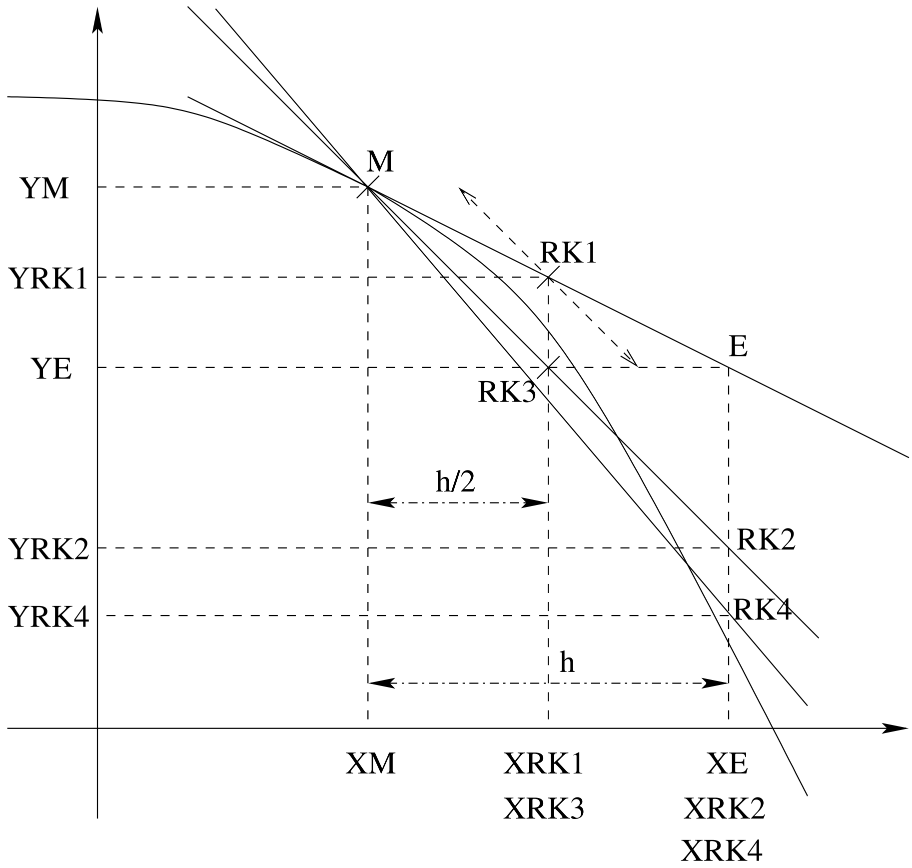

Fig. 3 – Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

On itère le procédé en partant du point (X_0, Y_0) et en reprenant à chaque étape le point E comme nouveau point M, autant de fois qu'il le faut pour que X décrive l'intervalle demandé.

4.2 Questions

1) Calculer les coordonnées de RK_4 en fonction de celles de M, de F et de h.

2) Ecrire une procédure `RK4` à 5 paramètres : `F, X0, Y0, Xfin et n`,
qui calcule la liste des $n + 1$ points de la solution approchée pour les paramètres donnés.

3) Tracer la solution approchée de Runge-Kutta d'ordre 4 pour l'équation différentielle $y' = x + y$ avec $(x_0, y_0) = (0, 1)$ sur $[0, 4]$ avec $n = 10$.

4) Tracer sur un même graphe la solution exacte, la solution approchée d'Euler, la solution approchée de Runge-Kutta d'ordre 2 et la solution approchée de Runge-Kutta d'ordre 4.