Toutes les procédures demandées seront essayées avec les exemples de l'énoncé.

1 Centrale TSI 99 – Math 2

Soit $E = \mathbb{R}^5$, $\mathscr{B}$ la base canonique et $u \in \mathscr{L}(E)$. On a : $u(e_1) = e_1$ et, $\forall j \in \{2,3,4,5\}$, $u(e_j) = e_{7-j}$.

Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $\forall j \in \{1,2,3,4,5\}$, $v(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{5} \alpha^{(i-1)(j-1)} e_i$, avec $\alpha = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/5}$.

On remarquera que, si `M` est une matrice, `evalm(M)[i,j]` est son élément ligne i, colonne j.
L'utilisation du package `linalg` est bien sûr indispensable.
Par ailleurs, la valeur de α en radicaux s'obtiendra avec `convert`, option `radical`.

1) Soit $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)$ et $B = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(v)$. Former A et B.
On pourra remplir ces matrices grâce à une fonction de 2 variables, à la fonction `matrix`.

2) Calculer et simplifier B^2, matrice qu'on appelera `B2`.
On devra sans doute simplifier les éléments de B^2 un par un. Pour cela, on écrira une procédure `SimplMat` à 3 paramètres `(M,n,p)` qui simplifie élément par élément les termes de la matrice M à n lignes et p colonnes.

3) Soit la matrice de passage : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$.

Soit $A' = \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(u)$ et $B' = \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(v)$, appelées `A1` et `A2` dans Maple.

a) Calculer A'.

b) Montrer en utilisant Maple que B' est de la forme : $\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & 0 & 0 \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & 0 & 0 \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_{1,1} & y_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 & y_{2,1} & y_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ écrite sous forme de blocs.
Former les matrices X et Y.
Pour cela on écrira une procédure `ExtraitMat` à 5 paramètres `(M,q,r,n0,p0)` qui, à partir de la matrice M constitue la matrice extraite à q lignes et r colonnes dont l'élément ligne n° 1 et colonne n° 1 est l'élément ligne n° $n0$ et colonne n° $p0$ de M. On ne se demandera pas si cette extraction est mathématiquement possible.

c) Diagonaliser les matrices X et Y en `X1` et `Y1`.
On écrira « à la main » les matrices de passage, `Q` et `R` après avoir utilisé `eigenvects`.

d) Former une matrice de passage `P1` qui diagonalise B' puis une matrice de passage `P2` qui diagonalise B.
Diagonaliser B.

2 CCP TSI 97 – Math 2

On a une matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ et un vecteur $Y = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix}$.

Former `A` et `Y`.

On cherche une solution approchée X_0 de : $A\,X = Y$. C'est aussi une solution de : ${}^t\!A\,A\,X = {}^t\!A\,Y$.
On note ${}^t\!A\,A = B$ et ${}^t\!A\,Y = Z$.

On admet que la suite (X_n) définie par : $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et : $\begin{cases} D_i = B\,X_i - Z \\ \mu_i = -\dfrac{\langle D_i \mid B\,D_i \rangle}{\|B\,D_i\|^2} \\ X_{i+1} = X_i + \mu_i\,D_i \end{cases}$

converge vers le vecteur X solution du problème posé.
Ecrire une procédure `ResolApproxSyst` à 3 paramètres `(A,Y,e)` qui calcule le premier vecteur X_n tel que $\|X_n - X_{n-1}\| \leqslant e$. Penser à `evalf` !
On l'utilisera avec les matrices données au début.

3 Un peu d'aide

- `with(linalg)` charge le package `linalg`.
- `vector` et `matrix` forment des vecteurs et des matrices.
  Les vecteurs sont des vecteurs colonne que Maple écrit... en ligne !
- `dotprod(U,V)` fournit le produit scalaire de U et V.
- `norm(U,2)` fournit la norme euclidienne du vecteur U.
- Ne pas oublier les `evalm` et `evalf` souvent indispensables...