Sommaire

L'objet de ce court chapitre est de voir quels sont les procédés de calcul de sommes exactes et approchées de séries numériques.

1. Calcul Exact de Sommes de Séries

Pour l'instant, on ne connait que la somme exacte des séries géométriques.

1.1. Sommation en dominos

On travaillera exclusivement sur un exemple.

Soit la série : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

On montre facilement la convergence car $\dfrac{1}{n(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente par le critère de Riemann.

Pour le calcul de la somme, on revient en fait à la définition en calculant effectivement la somme partielle.

On a :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

d'où : $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$ quand $n \to +\infty$.

En effet, on peut procéder en dominos :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\ u_2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ u_3 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ \cdots &= \cdots \\ u_n &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Et en sommant, les termes se simplifient en dominos, et on obtient : $s_n = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{n+1}$.

On aurait aussi pu réindexer la somme, on reprend le même calcul :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

1.2. Utilisation de séries entières ou de séries de Fourier

On se reportera à ces chapitres que nous allons bientôt étudier pour calculer des sommes exactes de séries numériques.

2. Calcul Approché de Sommes de Séries

Il est quand même rare de savoir calculer facilement la somme exacte d'une série numérique. Ce qui fait l'importance du calcul approché de ces sommes.

2.1. Principe général

On nous donne une série convergente $s = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et un réel strictement positif ε.
On cherche un rang n tel que le reste d'ordre n, r_n vérifie $|r_n| \leqslant \varepsilon$.
Ensuite, on prendra s_n comme valeur approchée à ε près de s.
On va étudier les façons usuelles de chercher n selon la série.
Sauf dans le premier cas, en général, l'énoncé guide vers la méthode à utiliser...

2.2. Série alternée répondant au critère spécial

Condition : La convergence de la série peut se montrer en utilisant le critère spécial des séries alternées.

C'est le cas le plus simple puisqu'on a un théorème. Comme on sait que si $\sum u_n$ vérifie les conditions du critère spécial, $|r_n| \leqslant |u_{n+1}|$,
on cherche simplement n tel que $|u_{n+1}| \leqslant \varepsilon$ et on calcule s_n.
En plus, le théorème nous donne le signe de l'erreur qui est celui de u_{n+1}.

Exemple : $s = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ à 10^{-2} près. Il nous suffit $\dfrac{1}{n+1} \leqslant 10^{-2}$, c'est à dire $n \geqslant 99$.
$\sum_{n=1}^{99} \dfrac{(-1)^n}{n}$ est une valeur approchée à 10^{-2} près de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.
Il suffit de calculer cette somme.

2.3. Série comparable à une série géométrique positive

Condition : La convergence absolue de la série peut se montrer en utilisant le critère de d'Alembert.

C'est souvent la méthode la plus rapide quand elle est applicable.

Solution : $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = l < 1$, d'où, à partir de N, $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant \lambda < 1$, et donc,
pour $n \geqslant N$, $|r_n| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \leqslant |u_{n+1}| \dfrac{1}{1-\lambda} \leqslant \dfrac{\lambda^{n-N+1}}{1-\lambda} |u_N|$.
Ceci permet le bon rang en majorant cette quantité par ε. Ce rang sera bien sûr au moins égal à N.

Exemple : On cherche $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n+1}$ à 10^{-3} prés.
La convergence de cette série positive est facilement obtenue (par exemple) par équivalence avec une série géométrique.
On a $0 \leqslant u_k \leqslant \dfrac{1}{2^k}$ qui est le terme général d'une série convergente,

et donc : $0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{\dfrac{1}{2^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{2^n}$.

Il suffit donc de chercher n tel que $\dfrac{1}{2^n} \leqslant 10^{-3}$, c'est à dire $2^n \geqslant 10^3$ ou enfin $n \geqslant \dfrac{3\ln 10}{\ln 2} \simeq 9{,}97$
Donc $n = 10$ convient, $\sum_{n=0}^{10} \dfrac{1}{2^n+1}$ est une valeur approchée à 10^{-3} prés de $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n+1}$.
Il suffit donc de calculer cette somme.

2.4. Série comparable à une intégrale de Riemann

Condition : La convergence absolue se montre en utilisant le critère de Riemann.

Solution : On a pour $n \geqslant N$, $|u_n| \leqslant \dfrac{K}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$, et donc,

pour $n \geqslant N$, $|r_n| \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \leqslant K \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Comme $\dfrac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, on obtient : $|r_n| \leqslant K \int_n^{+\infty} \dfrac{dt}{t^\alpha} = \dfrac{K}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}}$.

Ceci permet le bon rang en majorant cette quantité par ε. Ce rang sera bien sûr au moins égal à N.

Exemple : On cherche $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ à 10^{-3} prés.

La convergence de cette série positive est facilement obtenue (par exemple) par comparaison avec une intégrale généralisée. En effet, f définie par $f(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$ est positive, décroissante et d'intégrale convergente à l'infini.

On a $0 \leqslant u_k \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2+1}\ \mathrm{d}t$ et donc $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2+1}\ \mathrm{d}t = \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\ \mathrm{d}t \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n}$.

Il suffit donc de chercher n tel que $\dfrac{1}{n} \leqslant 10^{-2}$, c'est à dire $n \geqslant 100$.

Donc $n = 100$ convient, $\displaystyle\sum_{n=0}^{100} \frac{1}{n^2+1}$ est une valeur approchée à 10^{-2} prés de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Il suffit donc de calculer cette somme.