Sommaire

Une série de fonctions est une série du type : $\sum f_n(x)$.
Nous n'avons pas à notre programme d'étude générale des séries de fonctions. Nous avons cependant à étudier deux types de séries de fonctions que sont les séries entières et les séries de Fourier.
On peut dire de toutes façons, qu'à x fixé, il s'agit d'une série numérique. Ainsi, l'ensemble des x pour lesquels la série $\sum f_n(x)$ converge sera l'ensemble de définition de la somme.
Cette somme est donc une fonction de x. Se posent alors les problèmes usuels, cette fonction est-elle continue, dérivable ?...

1. Séries Entières, Convergence

1.1. Série entière

Définition : Une **série entière** de la variable z est une série de la forme : $\sum a_n z^n$.
avec $z \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $a_n \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Exemple : Un polynôme est un cas très particulier et sans intérêt de série entière.
Par contre, une série géométrique est le premier cas de série entière rencontré (sans le dire) dans le cadre des séries géométriques.

Pour une valeur de z fixée à z_0 par exemple, la série $\sum a_n z_0^n$ est une série numérique.
Pour les valeurs de z telles que la série converge, on définit donc, point par point, une fonction de la variable z par : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.
Un des objets de ce chapitre est d'étudier des propriétés de ces fonctions.
Quand la variable est réelle, on va plutôt la noter x que z.

Exemple : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} z^n$ est donc une série entière où $a_n = \frac{1}{n^2+1}$.
Mais $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$ est aussi une série entière où $a_n = \frac{1}{n!}$ si n est pair et $a_n = 0$ si n est impair...

1.2. Rayon de convergence

Théorème : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière,
alors, il existe R un réel positif ou « $+\infty$ » tel que : $R = \sup \left\{r, r \in \mathbb{R}_+, \sum |a_n| r^n \text{ converge}\right\}$.
R est appelé le **rayon de convergence** de $\sum a_n z^n$.

Démonstration : $I = \left\{r, r \in \mathbb{R}_+,\ \sum |a_n|\, r^n \text{ converge}\right\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant 0, soit il est borné et admet alors une borne supérieure, soit il n'est pas borné et $R = +\infty$. ■

Exemple : Cherchons le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$

Soit $r \geqslant 0$, on sait que $\sum r^n$ ne converge que si $r < 1$ et $\sup [0,1[= 1$. On a donc $R = 1$.

On reviendra rapidement sur les moyens de calcul pratique de ce rayon de convergence. Signalons qu'il s'agit d'une notion fondamentale dans l'étude des séries entières.

1.3. Disque ouvert de convergence

Définition : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, R son rayon de convergence.
La boule ouverte de centre O et de rayon R, ou le plan complexe si $R = +\infty$, est appelée **disque ouvert de convergence** ou **intervalle ouvert de convergence** selon que la variable est complexe ou réelle.
Ce disque est vide si $R = 0$.

Cette notion de disque ouvert de convergence se justifie par le théorème suivant :

Théorème : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, R son rayon de convergence,

- si $|z_0| < R$ alors $\sum a_n z_0^n$ converge absolument,
- si $|z_0| > R$ alors $\sum a_n z_0^n$ diverge grossièrement, et
- si $|z_0| = R$, on ne sait rien à priori sur la convergence de la série. Tout peut se produire.

La figure 1, ci-dessous, illustre le théorème.

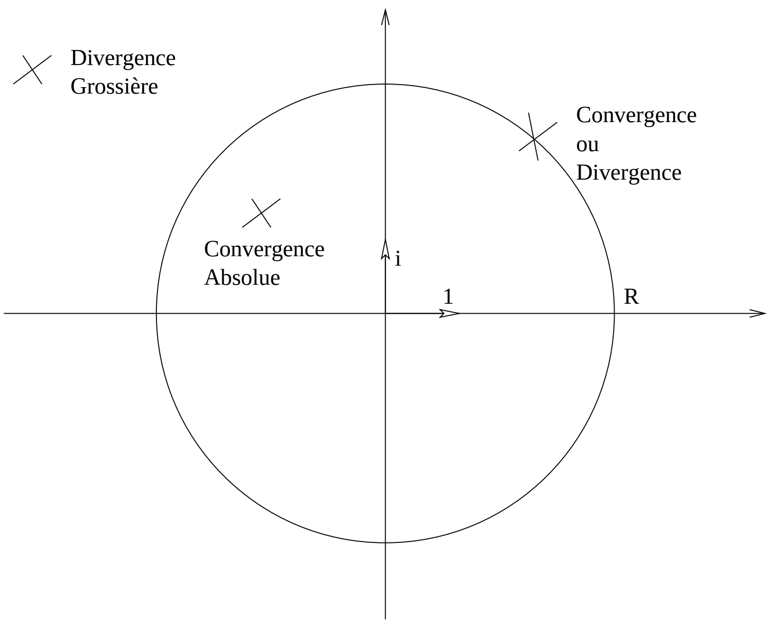

Figure 1 – **Convergence et Rayon de convergence**

Démonstration : La première proposition découle directement de la définition du rayon de convergence, $|z_0| < R \Rightarrow |z_0| \in I$, I étant l'intervalle utilisé dans la démonstration de l'existence du rayon de convergence.
Pour la deuxième proposition, on a $|z_0| > R$, supposons que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.
Alors il existe A tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n|\,|z_0^n| \leqslant A$.

Mais pour z tel que $|z| < |z_0|$, $|a_n|\,|z^n| = |a_n|\,|z_0^n| \left|\dfrac{z}{z_0}\right|^n \leqslant A \left|\dfrac{z}{z_0}\right|^n$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente.

Ce qui prouve que $R \geqslant |z|$ pour $|z| < |z_0|$, c'est à dire $R \geqslant |z_0|$, ce qui est contraire à l'hypothèse. La suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas bornée, la série diverge (très) grossièrement. ∎

1.4. Recherche pratique du rayon de convergence

> On peut toujours travailler en module pour rechercher le rayon de convergence.
> Une inégalité obtenue sur le rayon de convergence est toujours une inégalité large.
> On applique quand on peut le théorème de d'Alembert sur la convergence des séries numériques.
> Cependant on n'oubliera pas que ça n'est pas la seule méthode...

- Par le théorème de d'Alembert.
  On considère $\sum |a_n|\,|z^n|$ comme une série numérique en ne considérant pas les termes nuls, z étant fixé non nul.
  - Si le théorème de d'Alembert est applicable directement, R est le $|z|$ tel qu'on soit dans le cas douteux, c'est à dire tel que la limite est 1.
  - Si la limite est toujours nulle, $R = +\infty$.
  - Si pour un $|z|$ donné, la limite est inférieure ou égale à 1, $R \geqslant |z|$
  - Si pour un $|z|$ donné, la limite est supérieure ou égale à 1, $R \leqslant |z|$
- Dans le cas où le théorème de d'Alembert ne fournit pas le résultat, on obtient des inégalités en utilisant le paragraphe précédent.
  Si on a un z_0 tel que $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $R \geqslant |z_0|$, tandis que,
  si on a un z_0 tel que $\sum a_n z_0^n$ diverge, alors $R \leqslant |z_0|$.
- Si on a un z_0 tel que $\sum a_n z_0^n$ est **semi-convergente**, alors $R = |z_0|$.
  En effet, comme on n'a ni convergence absolue, ni divergence grossière, le rayon de convergence ne peut être ni plus grand ni plus petit que $|z_0|$.
- Si on n'a pas pu conclure en utilisant ce qui précède, on applique l'un des théorèmes suivants :

  Théorème : $R = \sup\left\{r, r \in \mathbb{R}_+,\ \lim\limits_{n\to\infty} |a_n|\, r^n = 0\right\}$

  Théorème : $R = \sup\left\{r, r \in \mathbb{R}_+, \text{la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\right\}$

  L'intérêt de ces théorèmes est qu'il suffit d'étudier la **suite** $(|a_n|\, r^n)$ pour déterminer le rayon de convergence. Il est donc inutile d'étudier la **série**, ce qui est plus complexe. Le premier résulte immédiatement de la convergence d'une série entière, on montre le second :
  Démonstration : On a $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|\, r^n = 0 \Rightarrow (|a_n|\, r^n)$ est bornée d'où $R \geqslant r$, ce qui entraine

  $$R \geqslant \sup\left\{r, r \in \mathbb{R}_+,\ \lim_{n\to\infty} |a_n|\, r^n = 0\right\}$$

  Si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|\, r^n \neq 0$, la série diverge et donc $r \geqslant R$. Ce qui achève la démonstration. ∎

Exemple : Cherchons le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n 2^n z^{2n}$.

$$\frac{(n+1)\, 2^{n+1}\, |z|^{2n+2}}{n 2^n\, |z|^{2n}} = \frac{n+1}{n} \times 2\,|z|^2 \to 2\,|z|^2 \text{ quand } n \to \infty, \text{ d'où } 2R^2 = 1 \text{ qui donne } R = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Exemple : Cherchons le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} x^n$.

- Si $0 \leqslant r < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} r^n = 0$, d'où $R \geqslant 1$ car il est supérieur ou égal à tous les r qui sont plus petits que 1.

- Si $r > 1$, $\dfrac{\sin n}{n} r^n$ n'a pas de limite quand $n \to \infty$, car $\dfrac{r^n}{n} \to +\infty$ et $\sin n$ n'a pas de limite.
  Donc, $\dfrac{\sin n}{n} r^n \nrightarrow 0$ et $R \leqslant 1$ car il est inférieur ou égal à tous les r qui sont plus grands que 1.
- Et donc $r = 1$.

2. Opérations sur les Séries Entières

2.1. Somme de 2 séries entières

Théorème : $\left.\begin{array}{l}\sum a_n z^n \text{ de rayon } R_a \\ \sum b_n z^n \text{ de rayon } R_b\end{array}\right\} \Rightarrow \sum (a_n + b_n)\, z^n$ est de rayon $\left\{\begin{array}{l}\inf(R_a,R_b) \text{ pour } R_a \neq R_b \\ R \geqslant R_a \text{ pour } R_a = R_b\end{array}\right.$

Démonstration : Si $R_a = R_b$, on n'a rien à montrer puisque la somme de 2 séries convergentes est convergente.
Si $R_a \neq R_b$, par exemple $R_a < R_b$.
Pour r tel que $R_a < r < R_b$, $\left.\begin{array}{r}\sum a_n r^n \text{ diverge} \\ \sum b_n r^n \text{ converge}\end{array}\right\} \Rightarrow \sum (a_n + b_n)\, r^n$ diverge, et $R \leqslant R_a$.
Par ailleurs, $R \geqslant R_a$ par somme de séries convergentes. On a donc bien $R = R_a$. ■

2.2. Produit par un scalaire

Théorème : Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R, et $\lambda \neq 0$,
alors $\sum \lambda\, a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R' = R$.

Démonstration : C'est tout à fait simple ! On prend un $r < R$, alors $\sum \lambda\, a_n r^n$ converge et donc : $R' \geqslant R$.
On prend ensuite $r > R$, alors $\sum \lambda\, a_n r^n$ diverge et donc : $R' \leqslant R$. ■

3. Somme d'une Série Entière de variable réelle

On notera cette série entière : $\sum a_n x^n$.

3.1. Intervalle de convergence, continuité

On a un théorème de continuité très simple qu'on va admettre.

Théorème :
$\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. On définit la fonction f par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

- Si $R = +\infty$, $D_f = \mathbb{R}$.
- Si R est fini, $D_f = \left\{\begin{array}{l}]-R,R[\\ \text{ou }]-R,R] \\ \text{ou } [-R,R[\\ \text{ou } [-R,R] \end{array}\right.$

De plus, dans tous les cas, f est **continue** sur D_f.

3.2. Dérivation et intégration terme à terme

Les théorèmes ont encore des énoncés très simples et on va encore les admettre.

Théorème :
$\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. On définit la fonction f par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur au moins $]-R,R[$ et $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, est une série entière qui a, de plus, le même rayon de convergence R.

Théorème :
$\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R, convergente sur $[0,x]$.
On définit la fonction f par : $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.
Alors $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, est une série entière qui a encore le même rayon de convergence R et qui converge partout où $\sum a_n x^n$ converge.

> En un mot, on peut dériver et intégrer terme à terme une série entière de variable réelle sur l'**ouvert** de convergence, ce qui ne change pas le rayon de convergence.
> De plus, on peut intégrer terme à terme une série entière sur **l'intervalle de convergence**

3.3. Développements usuels

On peut voir sur le tableau 1, page suivante, les développements usuels en série entière.
La série géométrique et l'exponentielle sont aussi valables pour une variable complexe.
Démonstration :

- Pour e^x, on applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n en 0 : $\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \times e^{|x|}$.
  Or $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} = 0$, ce qui se montre facilement en montrant que la série converge.
  D'où $\lim_{n\to\infty} \left(e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right) = 0$ ce qui est le résultat annoncé.
- Pour $\cos x$, on utilise le même procédé : $\left| \cos x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right| \leqslant \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \times 1$.
  Or $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0$, ce qui se montre facilement en montrant que la série converge. On conclut de la même façon.
- Pour $\sin x$, on utilise le même procédé : $\left| \sin x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leqslant \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!} \times 1$.
  Or $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!} = 0$, ce qui se montre facilement en montrant que la série converge. On conclut de la même façon.
- Pour $\operatorname{ch} x$, on écrit que $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, le résultat en découle immédiatement.
  C'est la même chose pour $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\frac{1}{1+x}$ est somme d'une série géométrique, de même $\frac{1}{1-x}$. La démonstration a été faite dans le chapitre relatif aux séries numériques.
- $\ln(1+x)$ et $-\ln(1-x)$ sont les primitives des précédentes qui s'annullent en 0.
  On va montrer le prolongement à la borme 1 pour $\ln(1+x)$, on l'admettra pour $-\ln(1-x)$.
  On a la convergence de en 1 de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ par application du critère spécial des séries alternées. Ceci prouve la continuité de la somme de la série entière en 1.
  Ainsi, la fonction et son développement en série entière sont :
  - définies et égales sur $]-1,1[$,

Tableau 1 – Développements usuels en série entière

f	$\mathbf{D}_f$	DSE	R	I
e^x	$\mathbb{R}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1+x}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$	1	$]-1,1[$
$\ln(1+x)$	$]-1,+\infty[$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	1	$]-1,1]$
$\dfrac{1}{1-x}$	$\mathbb{R}\setminus\{1\}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	1	$]-1,1[$
$\ln(1-x)$	$]-\infty,1[$	$\displaystyle -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$	1	$[-1,1[$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$	1	$[-1,1]$
$(1+x)^a$	$]-1,+\infty[$	$\displaystyle 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n$	1 ou $+\infty$ $(a\in\mathbb{N})$	

- ◦ définies et continues toutes les deux en 1,

on a ainsi l'égalité entre la fonction et la série entière en 1 et donc sur $]-1,1]$.

Ce procédé est très usuel pour « prolonger » l'égalité entre la fonction et son développement en série entière à une borne de l'intervalle de convergence. Il est régulièrement utilisé par les problèmes.

- $\arctan x$ est la primitive nulle en 0 de $\dfrac{1}{1+x^2}$ qui est aussi la somme d'une série géométrique.
  La convergence en 1 et en -1 s'obtient encore par application du critère spécial.
  L'égalité entre la fonction et la série entière en 1 et en -1 s'obtient encore en utilisant :
  - ◦ l'égalité de la fonction et de la série entière sur $]-1,1[$,
  - ◦ la continuité de la fonction et de la série entière en 1 et -1.
- Pour $(1+x)^\alpha$, avec $x\in\,]-1,1[$, on applique la formule de Taylor avec reste intégral :

$$(1+x)^\alpha-\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n\right)=\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}a(a-1)\dots(a-n)\,(1+t)^{\alpha-n-1}\ \mathrm{d}t$$
$$=\frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!}\int_0^x\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n(1+t)^{\alpha-1}\ \mathrm{d}t$$

Or, on montre assez facilement que : $\left|\dfrac{x-t}{1+t}\right| \leqslant |x|$, ce qui donne :

$$\left|(1+x)^{\alpha} - \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} x^n\right)\right| \leqslant \frac{|a(a-1)\ldots(a-n)|}{n!} |x|^n \left|\int_0^x (1+t)^{\alpha-1} \, \mathrm{d}t\right|$$

On montre ensuite que cette quantité tend vers 0 en calculant l'intégrale et en montrant par application du théorème de d'Alembert que c'est le terme général d'une série convergente.
Ce qui est laissé au lecteur, qui prendra soin de séparer les cas $x > 0$ et $x < 0$.

■

4. Développement d'une fonction en Série Entière, Sommation de Séries Entières

Les deux problèmes sont complémentaires, il s'agit pour unr fonction donnée de trouver une série entière égale à cette fonction sur un intervalle à préciser, ou bien il s'agit pour une série entière de trouver une fonction usuelle à laquelle est est égale sur un intervalle à préciser.

4.1. Fonction développable en série entière

Définition : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, définie au voisinage de 0.
On dit que f est développable en série entière à l'origine $\Leftrightarrow$ il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R, et un voisinage V de l'origine tel que : $\forall x \in V$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
On remarquera que nécessairement, $V \subset [-R,R]$.

Théorème : Soit f développable en série entière à l'origine, alors f est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ au voisinage de 0, et cette série entière est la série de Taylor : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.
Ce développement, s'il existe, est donc unique, égal à la série de Taylor à l'origine de la fonction.

> Il n'y a pas de réciproque, une fonction peut être de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ au voisinage de 0 sans être développable en série entière à l'origine.

Démonstration : Soit $]-a,a[\subset V$, alors, $\forall x \in]-a,a[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Or $]-a,a[\subset]-R,R[$, ce qui prouve que la série entière, et donc la fonction est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ au voisinage de 0.
On obtient, en dérivant terme à terme la série entière :

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0 \\ f'(0) &= 1 \times a_1 \\ f''(0) &= 2 \times 1 \times a_2 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(0) &= n! \times a_n \end{aligned}$$

Ce qui assure le résultat. ■

Corollaire : f définie et développable en série entière sur $]-a,a[$,

$$\begin{cases} f \text{ paire} & \Leftrightarrow \quad \text{son développement est pair} \\ f \text{ impaire} & \Leftrightarrow \quad \text{son développement est impair} \end{cases}$$

4.2. Développement d'une fonction en série entière

Il s'agit ici de la recherche pratique du développement d'une fonction donnée en série entière.

- Il faut essayer d'utiliser les développements connus, mais aussi leurs dérivées et leurs primitives...
- Ceci est toujours possible pour une fraction rationelle qu'on décompose en éléments simples sur $\mathbb{C}$, même si la fonction est à valeurs réelles. On se retrouve avec des séries géométriques et des dérivées de séries gé ométriques. Par exemple :

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n \text{ pour } |x| < |a|$$
$$\frac{1}{(a-x)^2} = \left(\frac{1}{a-x}\right)'$$

- On peut essayer la formule de Taylor avec reste intégral ou l'inégalité de Taylor-Lagrange comme on l'a fait pour les fonctions usuelles. L'énoncé doit vous guider...
- Enfin, on peut utiliser une équation différentielle. Là aussi, l'énoncé doit vous guider...
  - On considère au départ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ solution de l'équation différentielle. On pose donc $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
  - Tout ce qu'on écrit est valable pour $x \in]-R,R[$. Il faut le dire...
  - On calcule y' et au besoin y'', on reporte dans l'équation.
  - On éclate tout en sommes de séries entières.
  - On **regroupe ce qui se regroupe naturellement.**
  - Ensuite, on **réindexe pour trouver une série entière unique** et nulle.
  - Alors, chaque coefficient est nul, par unicité du développement en série entière quand il existe. On a en général une relation de récurrence entre les coefficients. Cette relation permet normalement de calculer les coefficients mais aussi assez souvent de trouver directement le rayon de convergence, ce qui est indispensable.

Exemple : On peut facilement retrouver les developpements de l'exponentielle, du sinus, ..., par ce procédé.

4.3. Sommation de certaines séries entières

Il faut essayer :

- en dérivant et en intégrant terme à terme,
- en regroupant ou en séparant des termes,

de se ramener à des séries connues.

Exemple : Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} x^n$.

On calcule facilement le rayon de convergence $R = 2$, on travaille pour $x \in]-2,2[$.
Le problème est ici d'abord le n en facteur. On considère que cet n est apparu lors d'une dérivation.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} x^{n-1} = x g'(x)$$

D'où : $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} = \dfrac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}} = \dfrac{x}{2-x}$ puisqu'il s'agit d'une série géométrique.

Par simple dérivation, $g'(x) = \dfrac{2}{(2-x)^2}$ et enfin : $\forall x \in]-2,2[\,,\ f(x) = \dfrac{2x}{(2-x)^2}$.

5. Exponentielle complexe

5.1. Exponentielle complexe

Définition : Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ qu'on appelle exponentielle de z.

Cette définition est bien entendue destinée à prolonger la définition de l'exponentielle dans $\mathbb{R}$.

5.2. Cohérence de cette définition

Pour $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos\theta + i\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = e^{i\theta}.$$

Tout ceci est bien compatible. Il faudrait encore montrer que $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$ pour avoir les règles de calcul habituelles sur les complexes. On admet ce résultat.

6. Compléments

6.1. Avec Maple

On peut toujours considérer une série entière comme une série numérique, x étant un paramètre.
Cependant, c'est le package « `powseries` » (littéralement, « série de puissances ») qui permet de manipuler spécifiquement des séries entières.

Il contient de nombreuses fonctions usuelles, citons $\left\{\begin{array}{l}\texttt{powsin}\\ \texttt{powcos}\\ \texttt{powexp}\\ \texttt{powslog}\end{array}\right.$

De plus « `evalpow` » qui permet de créer une série entière pour n'importe quelle fonction, et « `powsolve` » qui permet de résoudre en série entière une équation différentielle linéaire. On renvoie à l'aide Maple sur chacun de ces mots-clefs.
Pas de faux espoirs cependant, Maple vous donnera facilement les premiers termes mais très rarement le terme général...

6.2. Les mathématiciens du chapitre

Mercator Nicolas 1620-1687 Cet allemand fut le précurseur de l'usage des développements en série entière. La série de Mercator est le développement de $\ln(1+x)$ ...

Gregory James 1638-1675 Ce mathématicien anglais fut le premier à s'intéresser à la convergence des séries entières... Il donna celle de l'arc-tangente...

Lagrange Joseph 1736-1813 Ce mathématicien français est sans doute le premier à s'être intéressé, entre autres, aux fonctions développables en série entière et aux sommes de séries entières.