Sommaire

Les séries de Fourier sont des séries de fonctions périodiques.
L'objet est de décomposer un signal périodique en somme de sinus et cosinus de fréquences égales à, et multiples de, la fréquence du signal de base.
Ce chapitre commence par une partie technique sur les application de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

1. Application de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux

1.1. Application de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $[a,b]$

Définition : f définie sur $[a,b]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $[a,b]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists\, a_0, a_1, \ldots, a_n \quad a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b \quad \text{tels que :} \\ \forall i \in \{1,2,\ldots,n\} \quad f_i = f_{|]a_{i-1},a_i[} \end{cases}$$

la restriction de f à $]a_{i-1},a_i[$ est prolongeable sur $[a_{i-1},a_i]$ en une application de classe $\mathscr{C}^1$ notée $\widetilde{f_i}$

Remarquons que f est nécessairement continue par morceaux mais pas nécessairement continue ! De plus, il faut bien observer que le fait d'être de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux ne dépend pas de la subdivision, il suffit que celle ci existe.
En pratique, il suffit de vérifier que le graphe de f n'aille jamais à l'infini et n'admette pas de tangente verticale. Pour cela, on fera **obligatoirement** un graphe de la fonction **sur un peu plus** d'une période.

1.2. Application T-périodique de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$

Définition : f, T-périodique, est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ pour $a \in \mathbb{R}$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $[a,a+T]$

C'est le type de fonctions qu'on rencontrera dans ce chapitre. La période sera d'ailleurs le plus souvent 2π.

1.3. Opération sur les applications $\mathscr{C}^1$ par mcx

Théorème :

- La somme,
- le produit par une constante et
- le produit

de 2 applications de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $[a,b]$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $[a,b]$.

Démonstration : Sans faire la démonstration dans le détail, signalons qu'il suffit de prendre une subdivision qui convient pour les **deux** applications. ∎

2. Série de Fourier d'une application T-périodique

Pour une application f, T-périodique, on va pouvoir déterminer la série de Fourier de f. Dans un deuxième temps, il va falloir déterminer

- si la série de Fourier de f converge et, de plus,
- **quelle est sa somme**.

Ce ne sera pas toujours $f(x)$ en tous points...

2.1. Coefficients de Fourier d'une application T-périodique continue par morceaux

Dans les séries de Fourier, assez souvent, on n'a de formule pour f que dans un certain intervalle, on veillera donc à n'utiliser cette formule que sur cet intervalle...

a/ Application T-périodique

Définition : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, T-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On pose, avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$,

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ \mathrm{d}t$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega t\ \mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos n\omega t\ \mathrm{d}t$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega t\ \mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin n\omega t\ \mathrm{d}t$$

Ce sont les coefficients de Fourier de f. Et a_0 est la valeur moyenne de f.

> Bien sûr, si f est à valeurs réelles, les coefficients de Fourier de f sont réels.

b/ Application 2π-périodique

Quand f est 2π-périodique, les coefficients sont :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \mathrm{d}t$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\cos nt\ \mathrm{d}t$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\sin nt\ \mathrm{d}t$$

> Dans le cas où f est paire ou impaire, on peut travailler sur une demi-période, mais pas n'importe laquelle :
> impérativement $\left[0, \dfrac{T}{2}\right]$.

c/ Application 2π-périodique et paire

Dans le cas où f est paire et 2π-périodique,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\ \mathrm{d}t$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\ \mathrm{d}t$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad bn = 0$$

d/ Application 2π-périodique et impaire

Dans le cas où f est impaire et 2π-périodique,

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad a_n = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\ \mathrm{d}t$$

e/ Coefficients de Fourier complexes

Si cela est plus facile, on peut calculer

$$c_0 = a_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\ \mathrm{d}t$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\, e^{-in\omega t}\ \mathrm{d}t = \frac{a_n - ib_n}{2} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

> Si f est à valeurs réelles, a_n et b_n sont réels, et donc : $a_n = 2\,\mathrm{Re}\,(c_n)$ et $b_n = -2\,\mathrm{Im}\,(c_n)$

2.2. Série de Fourier associée à une application T-périodique continue par morceaux

a/ Application T-périodique

Définition : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, T-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on appelle **série de Fourier de** f, la série

$$S(f)(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad \text{avec : } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

> Si f est paire, il n'y a pas de terme en sinus,
> tandis que si f est impaire, il n'y a pas de terme en cosinus.

b/ Application 2π-périodique

Dans le cas où f est 2π-périodique,

$$S(f)(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

3. Convergence d'une série de Fourier : théorèmes de Dirichlet

Les théorèmes de convergence, délicats à montrer, seront admis.

> Rien n'assure que la série de Fourier converge en tous points.
> En un point où la série de Fourier converge, rien n'assure que $S(f)(t) = f(t)$.

3.1. f de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, T-périodique

Théorème : f de classe $\mathscr{C}^1$ **par morceaux** sur $\mathbb{R}$, T-périodique
$\Rightarrow$ la série de Fourier de f converge en tous points, et est de somme

$$S(f)(t) = \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$$

où $f(t+0)$ et $f(t-0)$ sont les limites à droite et à gauche de f.

> En tous points où f est continue, on a : $S(f)(t) = f(t)$.
> Il n'y a qu'aux points où f est discontinue qu'il risque d'y avoir $S(f)(t) \neq f(t)$.
> On fera donc un graphe de la fonction sur un peu plus d'une période
>
> - pour repérer les points de discontinuité,
> - voir si la valeur au point est la demi-somme des limites à droite et à gauche,
> - et vérifier de toutes façons le caractère $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ de f.

Si, en un point de discontinuité, on n'a pas $f(t) = \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$, alors, on considère une application $\widetilde{f}$ égale à f partout où elle est continue et $\widetilde{f}(t) = \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$ là où f est dicontinue.
Comme il n'y a qu'en quelques points que f et $\widetilde{f}$ sont différentes, elles ont la **même série de Fourier**.
Par conséquent, la série de Fourier de f a pour somme $\widetilde{f}$.

3.2. f continue, de classe $\mathscr{C}^1$ **par morceaux** sur $\mathbb{R}$, T-périodique

Théorème : f **continue** et de classe $\mathscr{C}^1$ **par morceaux** sur $\mathbb{R}$, T-périodique
$\Rightarrow$ la série de Fourier de f converge en tous points, et : S(f)(t)=f(t).
De plus, les séries $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ convergent.
Enfin, $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t$ peut se calculer en intégrant terme à terme la série de Fourier de f.

D'autre part, nous avons un théorème d'unicité du développement en série de Fourier :

Théorème : Soit f **continue**, somme d'une série trigonométrique en tous points,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

Alors, cette série **est la série de Fourier de** f.

Ceci permet donc parfois de trouver le développement en série de Fourier par des moyens « détournés » comme par exemple des développements en série entière en e^{it} et e^{-it}.

3.3. Deux exemples

Nous allons « observer » la convergence des séries de Fourier de deux applications de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, l'une continue, l'autre discontinue.

a/ f continue

Soit f paire, 2π périodique, valant $\dfrac{\pi}{2} - t$ sur $[0,\pi]$. Le calcul de la série de Fourier est simple. Les b_n sont nuls, les a_{2k} aussi et les a_{2k+1} valent $\dfrac{4}{\pi\,(2k+1)^2}$. Ainsi la série de Fourier est :

$$S(f)(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos{(2k+1)\,x}$$

On s'intéresse ici aux sommes partielles : $S_{2p+1}(f)(x) = \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos{(2k+1)\,x}$

> On ne dispose ici d'une formule explicite de $f(t)$ que sur $[0,\pi]$. On veillera avec soin à ne pas utiliser cette formule **en dehors** de cet intervalle !

On voit sur la figure 1, page suivante, quelques sommes partielles de la série de Fourier de f.
On peut voir que la convergence de la série de Fourier vers la fonction est rapide.
Quelques harmoniques suffisent, un grand nombre n'apporte rien de plus.

b/ f discontinue

Soit g impaire, 2π périodique, valant 1 sur $]0,\pi[$. Elle vaut donc 0 en 0 et en π. Le calcul de la série de Fourier est simple. Les a_n sont nuls, les b_{2k} aussi et les b_{2k+1} valent $\dfrac{4}{\pi\,(2k+1)}$. Ainsi la série de Fourier est :

$$S(g)(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin{(2k+1)\,x}$$

On s'intéresse ici aux sommes partielles : $S_{2p+1}(g)(x) = \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2k+1} \sin{(2k+1)\,x}$
On voit sur la figure 2, page 7, quelques sommes partielles de la série de Fourier de g.
On voit ici que la discontinuité entraîne une convergence beaucoup plus lente et qu'il faut un grand nombre d'harmoniques pour « recopier » avec précision le signal.

4. Espace Vectoriel $\mathscr{C}_T(\mathbb{R})$ des applications continues, T-périodiques

4.1. Espace vectoriel $\mathscr{C}_T(\mathbb{R})$

Théorème : $\mathscr{C}_T(\mathbb{R})$, l'ensemble des applications **continues**, T-périodiques, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un espace vectoriel réel.

Démonstration : C'est clairement un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ puisque

- $\mathscr{C}_T(\mathbb{R})$ est non vide,
- une combinaison linéaire d'applications T-périodique est T-périodique.

■

4.2. Norme et produit scalaire sur $\mathscr{C}_T(\mathbb{R})$

Théorème : Sur $\mathscr{C}_T(\mathbb{R})$: $\langle f,g\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire.

La norme associée est : $\|f\| = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)\,\mathrm{d}t}$

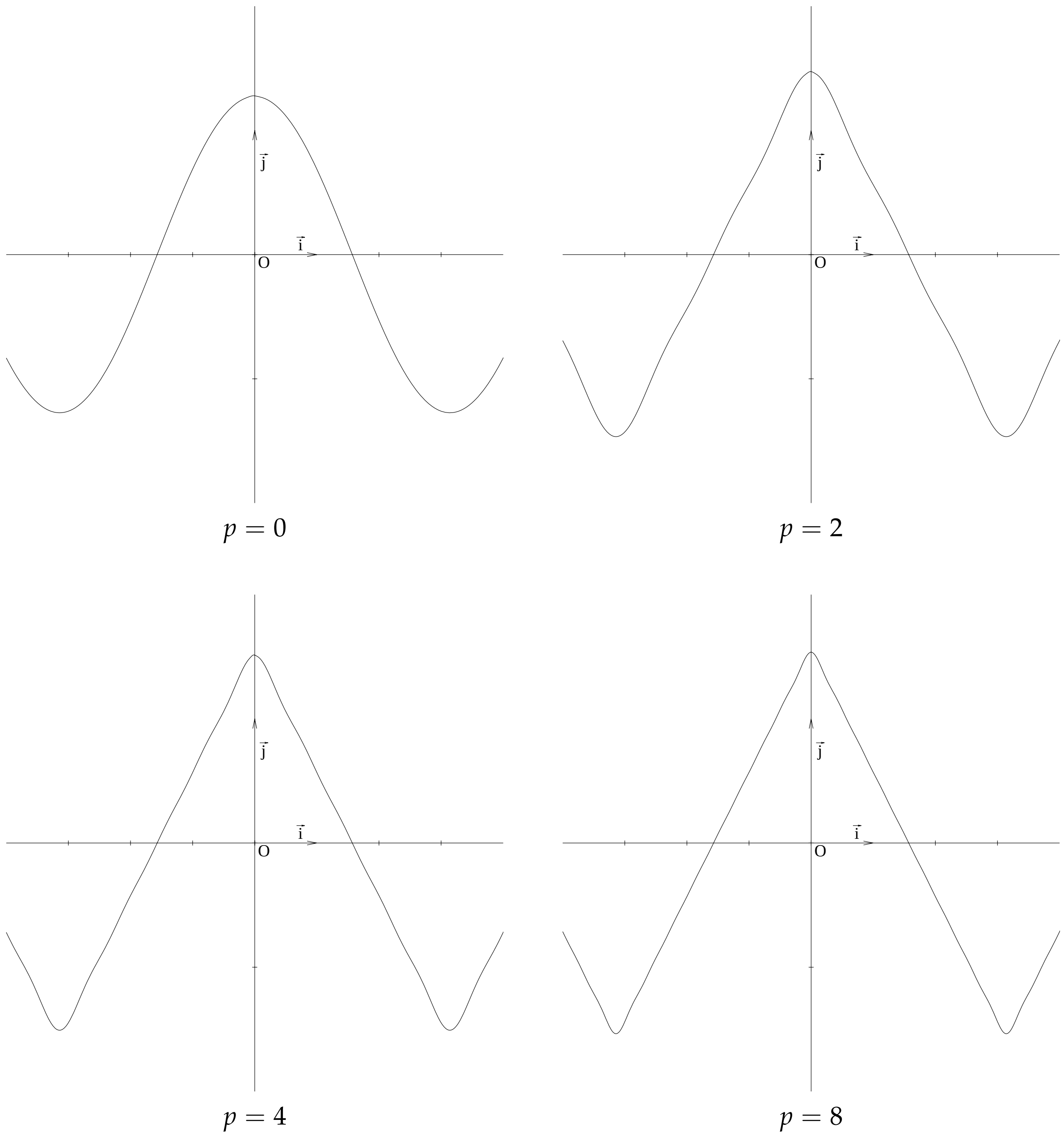

Figure 1 – **Sommes partielles de la série de Fourier pour une application continue**

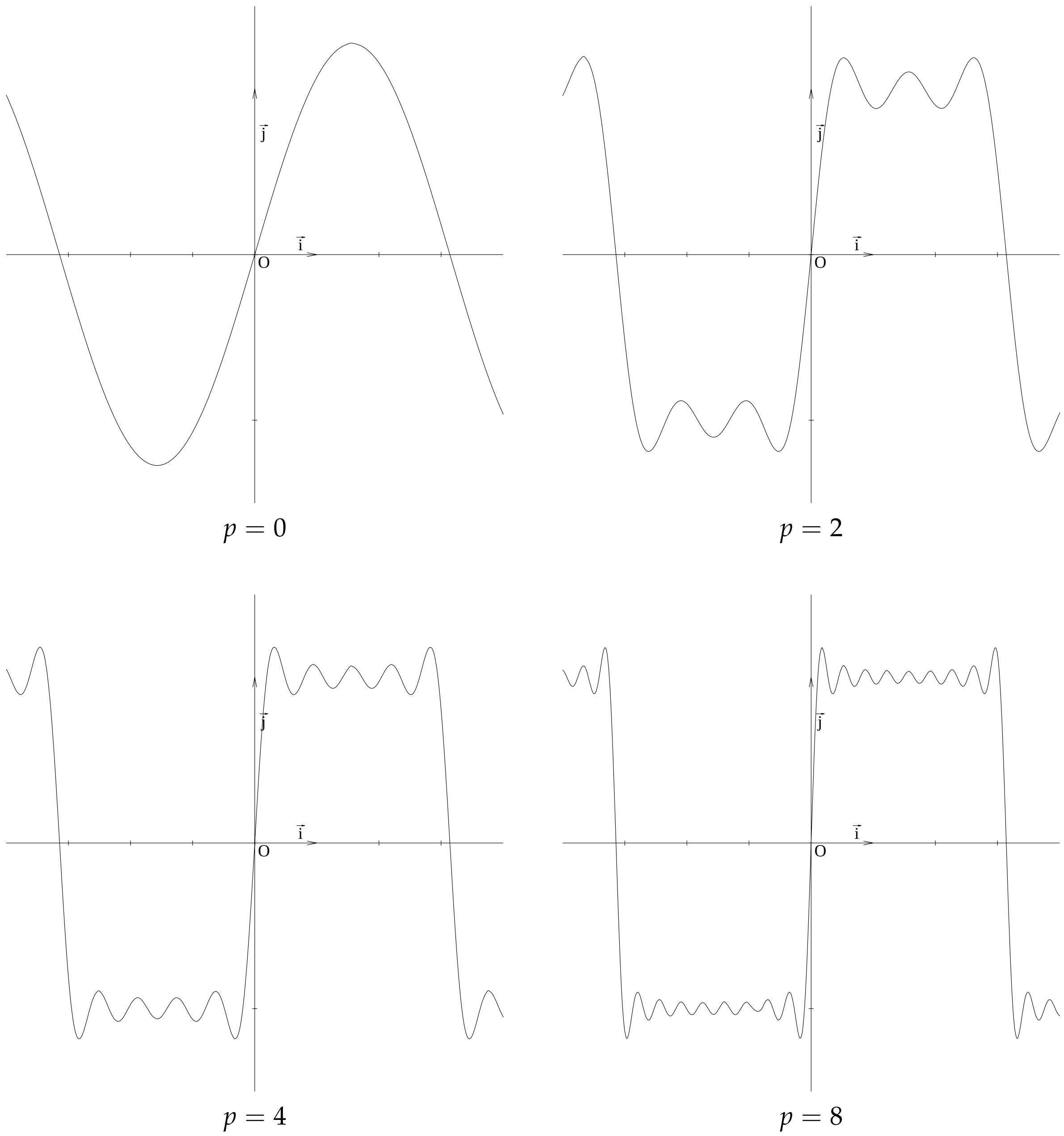

Figure 2 – **Sommes partielles de la série de Fourier pour une application discontinue**

> Si les applications sont simplement **continues par morceaux**,
> $\langle f,g\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$ est une forme bilinéaire symétrique positive.

Démonstration :

- $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est clairement bilinéaire symétrique, par linéarité de l'intégrale.
- $\langle f,f\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)\ \mathrm{d}t \geqslant 0$, la forme quadratique est positive.
- $\langle f,f\rangle = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)\ \mathrm{d}t = 0$, on applique le théorème des 3 conditions à : $t \to f^2(t)$.
  Cette application est :

  1. positive,
  2. continue,
  3. d'intégrale nulle sur $[\alpha,\alpha+T]$,

  donc $\forall t \in [\alpha,\alpha+T]\,,f^2(t) = 0$, donc $f(t) = 0$ et comme f est T-périodique, $\forall t \in \mathbb{R},f(t) = 0$ et donc $f = 0$.

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ est donc bien bilinéaire symétrique, définie positive, c'est un produit scalaire. ■

4.3. Famille orthogonale

Théorème : La famille $\left\{(t \to \cos n\omega t)_{n\in\mathbb{N}}\,,(t \to \sin n\omega t)_{n\in\mathbb{N}^*}\right\}$ est orthogonale pour ce produit scalaire.

Démonstration : Il faut vérifier que ces applications sont 2 à 2 orthogonales.

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos n\omega t \cos p\omega t\ \ \mathrm{d}t = \frac{1}{2T}\int_0^T \cos\left(n+p\right)\omega t + \cos\left(n-p\right)\omega t\ \mathrm{d}t = 0\ \ (n\neq p)$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sin n\omega t \sin p\omega t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2T}\int_0^T \cos\left(n-p\right)\omega t - \cos\left(n+p\right)\omega t\ \ \mathrm{d}t = 0\ \ (n\neq p)$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos n\omega t \sin p\omega t\ \ \mathrm{d}t = \frac{1}{2T}\int_0^T \sin\left(n+p\right)\omega t + \sin\left(p-n\right)\omega t\ \ \mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2T}\left[\frac{\cos\left(n+p\right)\omega t}{n+p} + \frac{\cos\left(p-n\right)\omega t}{p-n}\right]_0^T = 0$$

On a fait ce dernier calcul quand $n\neq p$ mais le résultat est le même quand $p = n$ car le deuxième sin disparait directement. ■

4.4. Formule de Parseval

Théorème : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, T-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left|f^2(t)\right|\ \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}\left|f^2(t)\right|\ \mathrm{d}t = \left|a_0^2\right| + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left|a_n^2\right| + \left|b_n^2\right|\right)$$

Si la fonction est réelle : $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)\ \mathrm{d}t = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$

Si, de plus, f est 2π-périodique, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f^2(t)\ \mathrm{d}t = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$

On va donner une interprétation géométrique pour les applications à valeur réelle.
Soit :

$$E_n = Vect\left(1, \cos\omega t, \cos 2\omega t, \ldots, \cos n\omega t, \sin\omega t, \sin 2\omega t, \ldots, \sin n\omega t\right)$$

dont une base orthonormale est :

$$\left(1,\sqrt{2}\cos\omega t,\sqrt{2}\cos 2\omega t,\ldots,\sqrt{2}\cos n\omega t,\sqrt{2}\sin\omega t,\sqrt{2}\sin 2\omega t,\ldots,\sqrt{2}\sin n\omega t\right)$$

La projection orthogonale f sur E_n est donc :

$$p(f)(t)=\langle f,1\rangle\,1+\sum_{k=1}^{n}\left\langle f,\sqrt{2}\cos k\omega t\right\rangle\sqrt{2}\cos k\omega t+\sum_{k=1}^{n}\left\langle f,\sqrt{2}\sin k\omega t\right\rangle\sqrt{2}\sin k\omega t$$

Et donc, la norme de cette projection sur E_n est :

$$\|p(f)\|^2=\langle f,1\rangle^2+\sum_{k=1}^{n}\left\langle f,\sqrt{2}\cos k\omega t\right\rangle^2+\sum_{k=1}^{n}\left\langle f,\sqrt{2}\sin k\omega t\right\rangle^2$$

$$=\left(\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(t)\ \mathrm{d}t\right)^2+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(t)\sqrt{2}\cos k\omega t\ \mathrm{d}t\right)^2+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(t)\sqrt{2}\sin k\omega t\ \mathrm{d}t\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(t)\ \mathrm{d}t\right)^2+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(t)\cos k\omega t\ \mathrm{d}t\right)^2+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(t)\sin k\omega t\ \mathrm{d}t\right)^2$$

$$=a_0^2+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}a_k^2+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}b_k^2$$

On voit bien que la formule de Parseval est la limite d'une égalité de normes.
Les $\frac{1}{2}$ viennent du fait que les cosinus et sinus ne sont pas de norme 1 mais de norme $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. Petits compléments

5.1. Quelques valeurs utiles

On n'oubliera pas que pour $n\in\mathbb{Z}$, $e^{in\pi}=(-1)^n$, $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, $\cos n\pi=(-1)^n$, $\sin n\pi=0$

5.2. Sommation de certaines séries numériques

Les série de Fourier permettent de calculer facilement la somme de certaines séries numériques.

On considère donc : $f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$ d'un coté

et $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ d'un autre. (cas de la période 2π)

- Si les u_n « ressemblent » aux a_n ou aux b_n.
  Alors, on obtient la somme en prenant une valeur particulière de t. Le plus souvent, on essaye $0,\pi,\frac{\pi}{2}$...
- Si les u_n « ressemblent » aux a_n^2 ou aux b_n^2. (avec en plus un module s'ils ne sont pas réels)
  Alors, on obtient la somme en utilisant la formule de Parseval.

5.3. Somme d'une série trigonométrique

On sait parfois que : $f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)$, ce résultat ayant été acquis sans le théorème de Dirichlet. (On obtient parfois un tel résultat en utilisant des séries entières en $e^{i\omega t}$ et $e^{-i\omega t}$.)

- Si f est continue, on a bien la série de Fourier de f.
- Si f n'est pas continue, **rien ne prouve** qu'il s'agit de la série de Fourier de f.
  Pour arriver au résultat, l'énoncé vous guide ...
  On peut par exemple prouver que cette série trigonométrique peut s'intégrer terme à terme sur une période, ce qui revient à l'inversion de signes $\sum$ et $\int$.
  Alors l'orthogonalité des $\cos n\omega t$ et $\sin n\omega t$ permettra de conclure qu'on a bien la série de Fourier de f.

6. Compléments

6.1. Avec Maple

Si on veut calculer des coefficients de Fourier avec Maple, il ne faudra pas oublier, si on veut que Maple pense à simplifier certains résultats de lui préciser que n est un entier par
`> assume(n,integer);`
Il faudra de plus sans doute demander ces simplifications, par exemple par
`> normal(a(n));` si `a(n)` est un des coefficients de Fourier.

6.2. Les mathématiciens du chapitre

Riemann Bernhard 1826-1866 Rappelons ce grand mathématicien allemand, auteur de nombreux travaux sur les séries trigonométriques...

Fourier Joseph 1768-1830 C'est ce français qui, à juste titre, a laissé son nom au chapitre...

Dirichlet Gustav 1805-1859 Ce mathématicien allemand a aussi laissé, à juste titre, son nom aux conditions suffisantes de convergence...

Parseval Marc 1755-1836 L'égalité de Parseval est bien due à ce mathématicien français.