Sommaire

1. Cylindres **1**
- 1.1. Cylindre, génératrice et directrice 1
- 1.2. Equation générale d'un cylindre 1
- 1.3. Plan tangent le long d'une génératrice . 2
- 1.4. Cyl. de direction et directrice données . 2
- 1.5. Recherche du contour apparent 4
- 1.6. Equation d'un cylindre circonscrit . . . 4

2. Cônes **5**
- 2.1. Cône 5
- 2.2. Equation polynomiale d'un cône 5
- 2.3. Plan tangent le long d'une génératrice . 6
- 2.4. Cône de sommet et directrice donnés . . 6
- 2.5. Recherche du contour apparent 8
- 2.6. Cône circonscrit à une surface 9

3. Surfaces de Révolution **10**
- 3.1. Surface de révolution d'axe Δ 10
- 3.2. Equation cartésienne 10
- 3.3. Rotation d'une demi-méridienne / Oz . 10
- 3.4. Rotation de Γ autour de Δ 11

4. Cylindres et cônes de révolution **12**

Figures

1 Exemples de cylindres 2
2 Cylindre : direction et directrice 3
3 Contour apparent dans une direction . . 5
4 Exemples de cônes 6
5 Cône : sommet et directrice 7
6 Contour apparent depuis un point . . . 9
7 Surface de révolution 11

Ce chapitre étudie quelques surfaces particulières : les cylindres et cônes qui sont formés de droites, et les surfaces de révolution. Enfin, on traitera à part les cylindres et cônes de révolution.
Dans tout le chapitre, $\mathbb{R}^3$ sera muni d'un repère orthonormal $\left(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$.

1. Cylindres

1.1. Cylindre, génératrice et directrice

Définition : Un **cylindre de direction** $\overrightarrow{u}$ est une surface formée d'une famille de droites de direction $\overrightarrow{u}$.
Ces droites sont les **génératrices** du cylindre.
Une courbe qui rencontre toutes les génératrices est une **directrice**.
L'intersection de la surface avec un plan perpendiculaire à la direction $\overrightarrow{u}$, est une **section droite** du cylindre.

La figure 1, page suivante, montre des exemples de « cylindres ».

> Un cylindre n'est pas, en général, un cylindre de révolution !

Définition : Si $\mathscr{S}$ est une surface, l'ensemble des points M de $\mathscr{S}$ tels que la direction du plan tangent à $\mathscr{S}$ en M contient $\overrightarrow{u}$ est le **contour apparent** de $\mathscr{S}$ dans la direction $\overrightarrow{u}$.
Le cylindre de direction $\overrightarrow{u}$ et de directrice ce contour apparent est le **cylindre circonscrit** à $\mathscr{S}$ dans la direction $\overrightarrow{u}$.

1.2. Equation générale d'un cylindre

Théorème : $\mathscr{S}$ est un cylindre de direction $\overrightarrow{k}$ $\Leftrightarrow$ $\mathscr{S}$ a une équation de la forme : $F(x,y) = 0$.
C'est aussi dans le plan xOy l'équation de la section droite de $\mathscr{S}$.

> La courbe d'équation $F(x,y) = 0$ dans le plan xOy est la section droite du cylindre d'équation $F(x,y) = 0$ dans l'espace.
> Ainsi, **l'interprétation** d'une équation incomplète (en x, ou y ou z) est celle d'une courbe ou d'une surface...

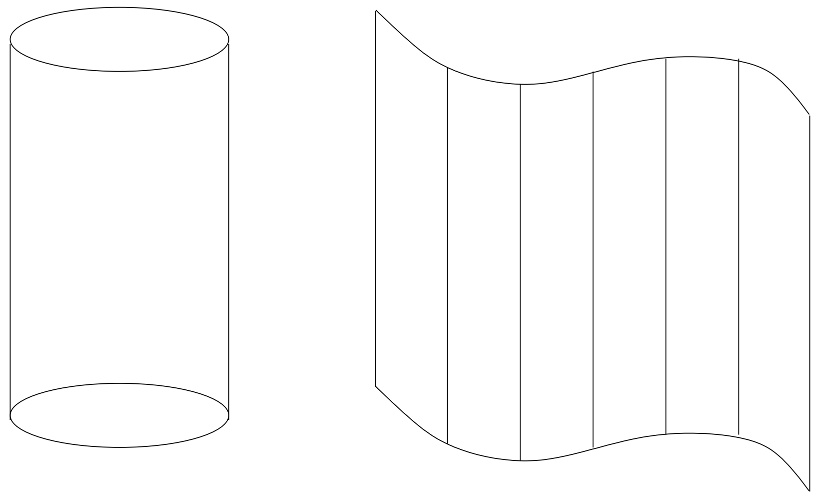

Figure 1 – ***Exemples de cylindres***

De même, s'il manque y dans l'équation, on a un cylindre de direction $\overrightarrow{\jmath}$.

Démonstration : On admet que $\mathscr{S}$ a une équation de la forme $H(x,y,z) = 0$.

Mais, si $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathscr{S}$, la droite $\left(M_0, \overrightarrow{k}\right)$ est tracée sur $\mathscr{S}$ et donc : $\forall z \in \mathbb{R}, H(x_0,y_0,z) = 0$

Ce qui prouve qu'en fait, H ne dépend pas de z. On peut donc écrire : $H(x,y,z) = F(x,y)$ ■

Théorème : $\mathscr{S}$ est un cylindre de direction $\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \mathscr{S}$ a une équation de la forme :

$$F(P_1,P_2) = 0$$

avec $P_1(x,y,z) = k_1$ et $P_2(x,y,z) = k_2$, l'équation de deux plans.
Et enfin, $P_1 \cap P_2$ donne la direction $\overrightarrow{u}$.

Démonstration : Un changement de repère orthonormal où $\overrightarrow{K} // \overrightarrow{u}$, fournit $F(X,Y) = 0$, et en revenant dans le repère d'origine, $F(P_1,P_2) = 0$. ■

1.3. Plan tangent le long d'une génératrice

Théorème : Le plan tangent à un cylindre le long d'un génératrice est invariant.

Démonstration : Quitte à changer de repère, on peut travailler avec $F(x,y) = 0$. Le plan tangent le long de la génératrice (x_0,y_0,λ) est d'équation :

$$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$$

qui clairement ne contient pas λ. ■

1.4. Equation d'un cylindre de direction et de directrice données

On va chercher l'équation d'un cylindre Σ de direction $\overrightarrow{u}$ et de directrice Γ donnés.

- Faire une figure symbolique, comme la figure 2, page suivante.

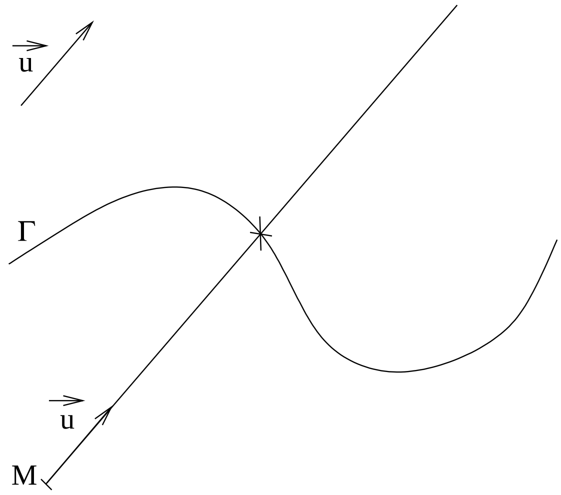

Figure 2 – ***Cylindre : direction et directrice***

- Partir d'un point **quelconque** du cylindre Σ cherché $M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$
- Ecrire que la droite (décrite en paramétrique) $\left(M,\overrightarrow{u}\right)$ rencontre Γ : $\quad \exists\lambda \in \mathbb{R},\ M + \lambda\,\overrightarrow{u} \in \Gamma$
  Pour cela, on a, en pratique, deux cas selon que Γ est donnée en paramétriques ou par intersection de surfaces.

  - Si Γ est définie en paramétriques.
    On a $\overrightarrow{u} : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, et Γ : $\begin{cases} x(t) \\ y(t) & t \in I \\ z(t) \end{cases}$

    $$M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} \exists\lambda \in \mathbb{R} \\ \exists t \in I \end{cases} \begin{cases} x(t) = X + \lambda\alpha \\ y(t) = Y + \lambda\beta \\ z(t) = Z + \lambda\gamma \end{cases}$$

    On a directement une représentation de Σ en nappe paramé trée. Pour obtenir une équation cartésienne, on élimine λ et t entre ces deux équations, on obtient l'équation d'un cylindre Σ' qui contient le cylindre cherché.
  - Si Γ est définie par intersection de surfaces.
    On a $\overrightarrow{u} : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, et Γ : $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$

    $$M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Sigma \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} F(X+\lambda\alpha, Y+\lambda\beta, Z+\lambda\gamma) = 0 \\ G(X+\lambda\alpha, Y+\lambda\beta, Z+\lambda\gamma) = 0 \end{cases}$$

    On élimine le paramètre λ, on obtient l'équation d'un cylindre Σ' qui contient Σ le cylindre cherché.

Dans le cas où Γ est définie en paramétriques $\Gamma : \left\{\begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{array}\right.$ $t \in I$, on peut aussi paramétrer la droite de direction $\overrightarrow{u} : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ passant par un point de Γ, on obtient :

$$M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Sigma \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \exists \lambda \in \mathbb{R} \\ \exists t \in I \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} X = x(t) + \lambda\alpha \\ Y = y(t) + \lambda\beta \\ Z = z(t) + \lambda\gamma \end{array}\right.$$

Par rapport à la méthode précédente, cela revient à changer λ et $-\lambda$. On a encore directement une représentation en nappe paramétrée.

Exemple : On cherche une équation cartésienne du cylindre Σ de direction $\overrightarrow{u} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de directrice définie par $t \in \mathbb{R} : \left\{\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{array}\right.$. On a donc $M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Sigma \Leftrightarrow \exists \lambda, t \in \mathbb{R} : \left\{\begin{array}{l} \cos t = X + \lambda \\ \sin t = Y + \lambda \\ t = Z \end{array}\right.$.

On élimine facilement t, ce qui donne $\left\{\begin{array}{l} \cos Z = X + \lambda \\ \sin Z = Y + \lambda \end{array}\right.$.

Tout aussi facilement, on élimine λ, et on obtient enfin : $\cos Z - \sin Z = X - Y$ qui est l'équation d'un cylindre Σ' qui contient le cylindre cherché.

1.5. Recherche du contour apparent

On cherche le contour apparent de la surface $\mathscr{S}$ d'équation $F(x,y,z) = 0$ dans la direction $\overrightarrow{u} : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

Pour cela, on prend un point M de la surface $\mathscr{S}$, et on écrit que le gradient de F en ce point est normal à $\overrightarrow{u}$. Cela donne :

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= 0 \\ \alpha \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) + \beta \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) + \gamma \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

On a le ainsi contour apparent par intersection de surfaces.

Si on peut, il faut absolument simplifier au maximum les équations de ce contour apparent.

La figure 3, page ci-contre, illustre cette recherche.

1.6. Equation d'un cylindre circonscrit à une surface

Il suffit de chercher le contour apparent, puis de chercher le cylindre de la direction donnée et de directrice ce contour apparent.

Exemple : On cherche une équation cartésienne du cylindre Σ de direction $\overrightarrow{u} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ circonscrit à $\mathscr{S}$ d'équation : $x^2 + y^2 - z = 0$.

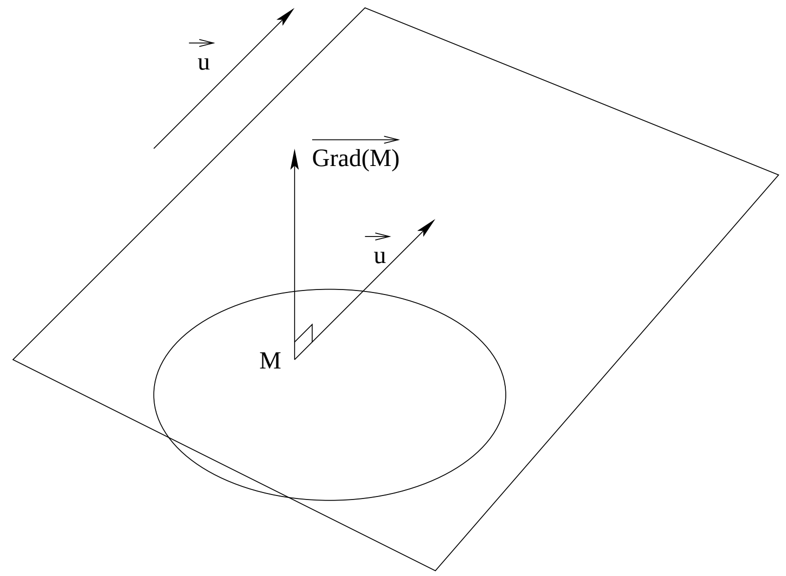

Figure 3 – ***Le plan tangent à $\mathscr{S}$ en M contient la direction $\vec{u}$***

Le contour apparent est donné comme on vient de le voir par : $\begin{cases} x^2+y^2-z=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases}$.

On a donc $M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Sigma \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} (X+\lambda)^2+(Y+\lambda)^2-Z=0 \\ 2(X+\lambda)+2(Y+\lambda)=0 \end{cases}$.

On élimine λ en réécrivant la deuxième équation, $\lambda = -\dfrac{X+Y}{2}$, et on obtient : $\left(\dfrac{X-Y}{2}\right)^2+\left(\dfrac{Y-X}{2}\right)^2-Z=0$ ou encore $(X-Y)^2-2Z=0$ qui est l'équation d'un cylindre Σ' qui contient le cylindre cherché.

2. Cônes

2.1. Cône

Définition : Une **cône de sommet** Ω est formée d'une famille de droites passant par Ω.
Ces droites sont les **génératrices** du cône**.**
Une courbe qui rencontre toutes les génératrices est une **directrice**.

La figure 4, page suivante, montre des exemples de « cônes ».

> Un cône n'est pas, en général, un cône de révolution!

Définition : Si $\mathscr{S}$ est une surface, l'ensemble des points M de $\mathscr{S}$ tels que le plan tangent à $\mathscr{S}$ en M contient Ω est le **contour apparent** de $\mathscr{S}$ vu de Ω.
Le cône de sommet Ω et de directrice ce contour apparent est le **cône circonscrit** à $\mathscr{S}$ vu de Ω.

2.2. Equation polynomiale d'un cône de sommet O

Théorème : Une surface dont léquation cartésienne est un polynôme en x,y,z est un cône de sommet O si et seulement si tous les monômes sont de même degré (en degré cumulé en x,y,z).

Démonstration : $\mathscr{S}$ d'équation $F(x,y,z)=0$, alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}, F(\lambda x, \lambda y, \lambda z)=0$, ce qui prouve que F est de degré homogène en x,y,z. ■

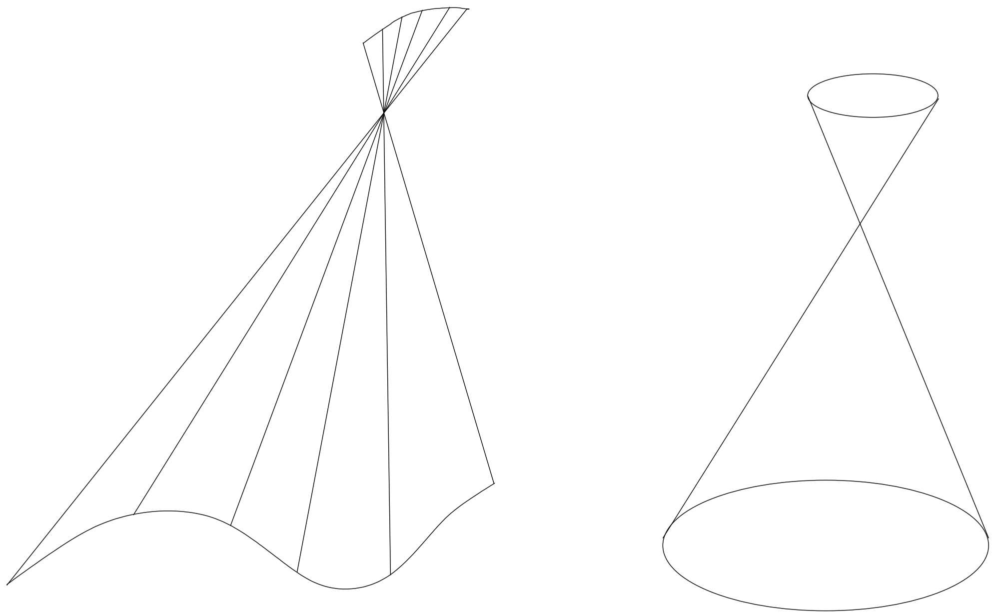

Figure 4 – ***Exemples de cônes***

2.3. Plan tangent le long d'une génératrice

Théorème : Le plan tangent à un cône, le long d'une génératrice, sauf au sommet, est invariant.

Démonstration : Quitte à changer de repère, on prend un cône de sommet O.

On a une directrice $\Gamma : \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}, t \in I,$ le cône en paramétrique est donc : $\begin{cases} X = \lambda\, x(t) \\ Y = \lambda\, y(t) \\ Z = \lambda\, z(t) \end{cases}, t \in I, \lambda \in \mathbb{R}.$

Le plan tangent le long de cette génératrice (si seul λ varie) est donc normal à : $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \lambda\, x'(t) \\ \lambda\, y'(t) \\ \lambda\, z'(t) \end{pmatrix}$

comme $\lambda \neq 0$, normal à : $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ qui ne contient plus λ.

Comme de plus, tous ces plans tangents contiennent cette génératrice, ils sont confondus. ■

2.4. Equation d'un cône de sommet et directrice donnés

On va chercher l'équation d'un cône Σ de sommet Ω et de directrice Γ donnés.

- Faire une figure symbolique comme la figure 5, page ci-contre.
- Partir d'un point **quelconque** du cône Σ^* cherché $M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$.

  (Σ^* est le cône épointé, c'est à dire privé de son sommet Ω).
- Ecrire que la droite (décrite en paramétrique) (ΩM) rencontre Γ : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega M} \in \Gamma$

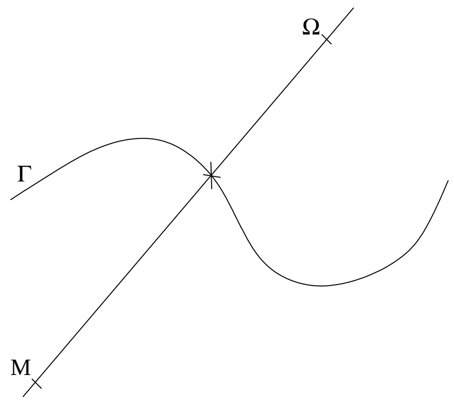

Figure 5 – ***Cône : sommet et directrice***

Pour cela, on a en pratique deux cas selon que Γ est donné en paramétriques ou par intersection de surfaces.

- Si Γ est donné en paramétriques.

  On a $\Omega : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, et $\Gamma : \left\{ \begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \quad t \in I \\ z(t) \end{array} \right.$

  $$M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Sigma^* \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \exists \lambda \in \mathbb{R} \\ \exists t \in I \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x(t) = a + \lambda (X - a) \\ y(t) = b + \lambda (Y - b) \\ z(t) = c + \lambda (Z - c) \end{array} \right.$$

  On a pratiquement directement une représentation en nappe paramé trée de Σ, pour obtenir une équation cartésienne, on élimine λ et t entre ces deux équations, on obtient l'équation d'un cône Σ' qui contient le cône cherché. Vérifier que $\Omega \in \Sigma'$.

- Si Γ est donné par intersection de surfaces.

  On a $\Omega : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, et $\Gamma : \left\{ \begin{array}{l} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{array} \right.$

  $$M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Sigma^* \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} F(a + \lambda (X - a), b + \lambda (Y - b), c + \lambda (Z - c)) = 0 \\ G(a + \lambda (X - a), b + \lambda (Y - b), c + \lambda (Z - c)) = 0 \end{array} \right.$$

  On élimine le paramètre λ, on obtient l'équation d'un cône Σ' qui contient Σ le cône cherché. Vérifier que $\Omega \in \Sigma'$.

Dans le cas où Γ est définie en paramétriques $\Gamma : \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$ $t \in I$, on peut aussi paramétrer la droite de direction passant par un point de Γ et Ω, on obtient :

$$M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} \exists\lambda \in \mathbb{R} \\ \exists t \in I \end{cases} \begin{cases} X = a + \lambda\,(x(t) - a) \\ Y = b + \lambda\,(y(t) - b) \\ Z = c + \lambda\,(z(t) - c) \end{cases}$$

Par rapport à la méthode précédente, cela revient à changer λ et $\dfrac{1}{\lambda}$. On a encore directement une représentation en nappe paramétrée.

Exemple : On cherche une équation cartésienne du cône Σ de sommet $\Omega : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de directrice définie par $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$.

On a donc $M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Sigma^* \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} (1 + \lambda\,(X-1))^2 + (1 + \lambda\,(Y-1))^2 + (\lambda Z)^2 = 4 \\ (1 + \lambda\,(X-1)) + (1 + \lambda\,(Y-1)) + (\lambda Z) = 1 \end{cases}$.

On réécrit ce système $\begin{cases} \lambda^2 \left((X-1)^2 + (Y-1)^2 + Z^2\right) + 2\lambda\,((X-1) + (Y-1)) = 2 \\ \lambda\,((X-1) + (Y-1) + Z) = -1 \end{cases}$.

On multiplie la première équation par $((X-1) + (Y-1) + Z)^2$
et on remplace $\lambda\,((X-1) + (Y-1) + Z)$ par -1.
On obtient $\left((X-1)^2 + (Y-1)^2 + Z^2\right) - 2\,((X-1) + (Y-1) + Z)\,((X-1) + (Y-1)) = 2$.
Ceci est l'équation d'un cône Σ' qui contient le cône cherché.

2.5. Recherche du contour apparent

On cherche le concout apparent de la surface $\mathscr{S}$ d'équation $F(x,y,z) = 0$ vu du point $\Omega : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Pour cela, on écrit que le gradient de F en un point M de $\mathscr{S}$ est normal au vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$.
Le contour apparent est donc donné par intersection de surfaces :

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= 0 \\ (x-a)\,\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) + (y-b)\,\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) + (z-c)\,\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

Si on peut, il faut absolument simplifier au maximum les équations de ce contour apparent.

La figure 6, page suivante, illustre cette recherche.

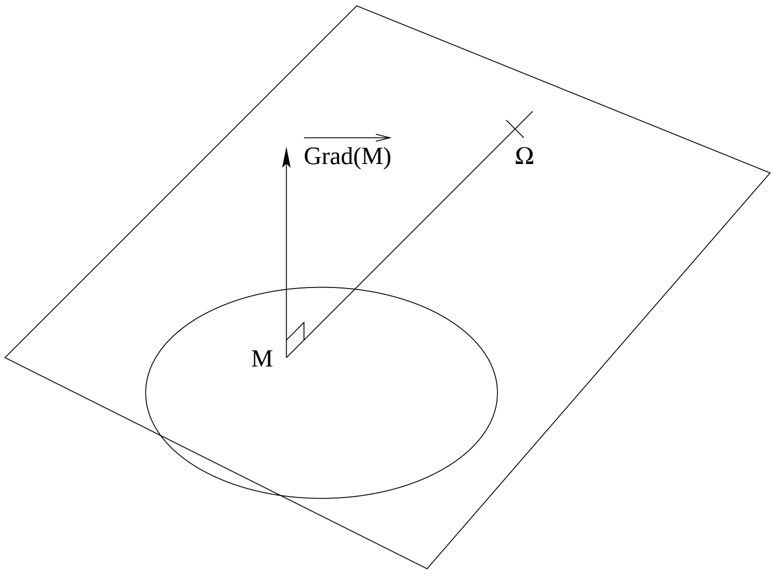

Figure 6 – ***Le plan tangent à*** $\mathscr{S}$ ***en*** M ***contient*** Ω

2.6. Equation d'un cône circonscrit à une surface

Il suffit de rechercher le contour apparent, puis de rechercher le cône de sommet donné et de directrice ce contour apparent.

Exemple : On cherche une équation cartésienne du cône Σ de sommet $\Omega : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et circonscrit à la surface $\mathscr{S}$ définie par $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Le contour apparent est donné par : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x(x-1) + 2y(y-2) + 2z^2 = 0 \end{cases}$.

On réécrit ce système : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 1 - x - 2y = 0 \end{cases}$.

On a donc $M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Sigma^* \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} (1 + \lambda(X-1))^2 + (2 + \lambda(Y-2))^2 + (\lambda Z)^2 = 1 \\ 1 - (1 + \lambda(X-1)) - 2(2 + \lambda(Y-2)) = 0 \end{cases}$.

Système qu'on réécrit : $\begin{cases} \lambda^2 \left((X-1)^2 + (Y-2)^2 + Z^2\right) + 2\lambda((X-1) + 2(Y-2)) + 4 = 0 \\ \lambda((X-1) + 2(Y-2)) = -4 \end{cases}$.

On multiplie la première par $((X-1) + 2(Y-2))^2$ et on remplace $\lambda((X-1) + 2(Y-2))$ par -4.
Ceci donne, après simplification par -4 :
$((X-1) + 2(Y-2))^2 + 4\left((X-1)^2 + (Y-2)^2 + Z^2\right) + 2(-(X-1) - 2(Y-2))((X-1) + 2(Y-2)) = 0.$
Ou encore : $-((X-1) + 2(Y-2))^2 + 4\left((X-1)^2 + (Y-2)^2 + Z^2\right) = 0.$
Ceci est l'équation d'un cône Σ' qui contient le cône cherché.

3. Surfaces de Révolution

3.1. Surface de révolution d'axe Δ

Définition : Δ une droite de l'espace.

Un cercle de l'espace est d'axe $\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} \text{son centre appartient à } \Delta \\ \text{il est tracé dans un plan orthogonal à } \Delta \end{cases}$

Définition : Une **surface de révolution d'axe** Δ est formée d'une famille de cercles d'axe Δ.
Ces cercles d'axe Δ sont les **parallèles** de la surface.

Un plan contenant l'axe de révolution est un **plan méridien**, son intersection avec la surface est une **méridienne.**
La méridienne est symétrique par rapport à l'axe de révolution. On parle donc parfois de demi-méridienne.
Une surface de révolution est donc engendrée par la rotation d'une méridienne ou d'une demi-méridienne autour de l'axe de révolution.

3.2. Equation cartésienne d'une surface de révolution d'axe Δ

Théorème : Une surface est de révolution d'axe $Oz \Leftrightarrow$ elle a une équation de la forme

$$F(x^2+y^2,z)=0$$

Démonstration : xOz est un plan méridien. La méridienne est symétrique par rapport à Oz.
Elle est donc d'équation $F(x^2,z)=0$. L'équation en coordonnées cylindriques est donc $F(\rho^2,z)=0$. On obtient donc en coordonnées cartésiennes $F(x^2+y^2,z)=0$. ■

Théorème : Une surface de révolution Σ d'axe Δ a une équation de la forme : $F(S,P)=0$

avec $\begin{cases} S(x,y,z)=R^2 & \text{l'équation d'une sphère et,} \\ P(x,y,z)=k & \text{l'équation d'un plan.} \end{cases}$

L'axe de révolution Δ est orthogonal à P et passe par le centre de S.

Démonstration : Dans un repère orthonormal centré sur $\Omega \in \Delta$, tel que $\overrightarrow{K}$ est dans la direction de Δ, Σ a une équation de la forme : $F_1\left(X^2+Y^2,Z\right)=0$ Ou encore : $F\left(X^2+Y^2+Z^2,Z\right)=0$
Or, en utilisant le produit scalaire et la norme : $\overrightarrow{K}=\alpha\overrightarrow{\imath}+\beta\overrightarrow{\jmath}+\gamma\overrightarrow{k}$
On obtient : $Z=\alpha(x-a)+\beta(y-b)+\gamma(z-c)$ et $X^2+Y^2+Z^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$
Ce qui donne le résultat. ■

3.3. Equation d'une surface de révolution engendrée par la rotation d'une demi-méridienne autour de Oz

Il s'agit de rechercher l'équation d'une surface de révolution d'axe $0z$ dont on connait une demi-méridienne ou une méridienne.
Si on a une demi-méridienne dans le plan xOz, elle est d'équation : $f(x,z)=0$
En complétant par symétrie, la méridienne complète est d'équation : $f(x,z)\,f(-x,z)=0$
Ce qu'on réécrit : $F\left(x^2,z\right)=0$
Alors la surface de révolution est simplement d'équation : $F\left(x^2+y^2,z\right)=0$
Pour cela, on utilise simplement les coordonnées cylindriques.

Exemple : On va chercher l'équation du tore de révolution engendré par la rotation du cercle du plan xOz d'équation $(x-2)^2+z^2=1$ autour de Oz.
Ce cercle est une demi-méridienne, l'autre demi-méridienne est d'équation $(x-2)^2+z^2=1$, et donc la méridienne : $\left((x-2)^2+z^2-1\right)\left((x+2)^2+z^2-1\right)=0$.
Ce qu'on réécrit : $\left(x^2-4\right)^2+2\left(z^2-1\right)\left(x^2+4\right)+\left(z^2-1\right)^2=0$. Il suffit alors de remplacer x^2 par x^2+y^2 et on obtient : $\left(x^2+y^2-4\right)^2+2\left(z^2-1\right)\left(x^2+y^2+4\right)+\left(z^2-1\right)^2=0$.

3.4. Equation d'une surface engendrée par la rotation de Γ autour de Δ

On recherche ici l'équation d'une surface de révolution Σ engendrée par la rotation de Γ autour de Δ. on traite ici le cas général.

- Faire une figure symbolique comme la figure 7, ci-dessous.

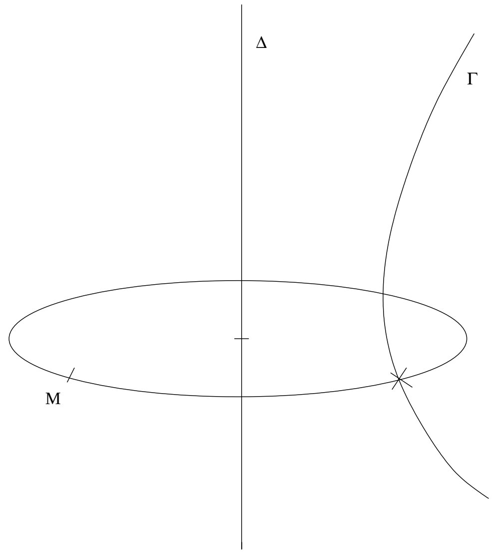

Figure 7 – ***Surface de révolution***

- Partir d'un point **quelconque** de la surface Σ cherchée $M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$
- Ecrire qu'un point de Γ appartient au cercle d'axe Δ passant par M.
  Ce qui revient à écrire qu'un point de Γ appartient à la fois,
  - à la sphère centrée sur un point arbitraire de Δ (choisi le plus simple possible) passant par M et
  - au plan perpendiculaire à Δ passant par M.

  Pour cela, on a en pratique deux cas selon que Γ est donné en paramétriques ou par intersection de surfaces.

  - Si Γ est définie en paramétriques.
    $\Delta = \left(\Omega, \overrightarrow{u}\right)$ avec $\Omega : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u} : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et enfin $\Gamma : \begin{cases} x(t) \\ y(t) \quad t \in I \\ z(t) \end{cases}$
    $$M \in \Sigma \Leftrightarrow \exists t \in I, \begin{cases} \alpha x(t) + \beta y(t) + \gamma z(t) = \alpha X + \beta Y + \gamma Z \\ (x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2 + (z(t) - c)^2 \\ \qquad = (X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 \end{cases}$$
    On élimine le paramètre, on obtient l'équation d'une surface Σ' de révolution qui contient Σ la surface cherchée.
  - Si Γ est définie par intersection de surfaces.

$$\Delta = \left(\Omega, \overrightarrow{u}\right) \text{ avec } \Omega : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{u} : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ et enfin } \Gamma : \begin{cases} F\left(x,y,z\right) = 0 \\ G\left(x,y,z\right) = 0 \end{cases}$$

$$M \in \Sigma \Leftrightarrow \exists x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}, \begin{cases} F\left(x_0,y_0,z_0\right) = 0 \\ G\left(x_0,y_0,z_0\right) = 0 \\ \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 = \alpha X + \beta Y + \gamma Z \\ \left(x_0 - a\right)^2 + \left(y_0 - b\right)^2 + \left(z_0 - c\right)^2 \\ \qquad = \left(X - a\right)^2 + \left(Y - b\right)^2 + \left(Z - c\right)^2 \end{cases}$$

On élimine les paramètres, on obtient l'équation d'une surface Σ' de révolution qui contient Σ la surface cherchée.

Exemple : On va chercher l'équation de la surface de révolution Σ engendrée par la rotation de la courbe $\Gamma : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = 1 + t \end{cases}$ autour de l'axe Δ passant par O et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit $M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ appartenant à la surface, Le cercle d'axe Δ passant par M, le plan passant par M et perpendiculaire à Δ, et Γ ont un point commun. Ce qui donne, compte tenu qu'on remplace le cercle par la sphère de centre O passant par M : $\exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} t^2 + t^4 + \left(1 + t\right)^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \\ t + t^2 = X + Y \end{cases}$.

On sort $t^2 = X + Y - t$ de la seconde équation, on le plonge dans la première,
ce qui donne : $1 + 2t + 2\left(X + Y - t\right) + \left(X + Y - t\right)^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$
puis $1 + 2\left(X + Y\right) + \left(X + Y\right)^2 - 2t\left(X + Y\right) = X^2 + Y^2 + Z^2$.

On a ainsi : $\begin{cases} 2t\left(X + Y\right) = 1 + 2\left(X + Y\right) + \left(X + Y\right)^2 - \left(X^2 + Y^2 + Z^2\right) \\ t + t^2 = X + Y \end{cases}$.

On multiplie la deuxième par $4\left(X + Y\right)^2$ et on remplace en utilisant la première :
$2\left(X + Y\right)\left(1 + 2\left(X + Y\right) + \left(X + Y\right)^2 - \left(X^2 + Y^2 + Z^2\right)\right) + \left(1 + 2\left(X + Y\right) + \left(X + Y\right)^2 - \left(X^2 + Y^2 + Z^2\right)\right)^2 = X + Y$.
On obtient l'équation d'une surface qui contient la surface de révolution cherchée.

4. Cylindres et cônes de révolution

On ne cherche pas l'équation d'un cylindre ou d'un cône de révolution comme celle d'un cylindre ou d'un cône ni comme celle d'une surface de révolution !...

1. Pour un cylindre de révolution défini par son axe $D : \left(A, \overrightarrow{u}\right)$ et son rayon R

   On cherche l'ensemble des points M tels que la distance de M à D vaut R : $\dfrac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\right\|}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|} = R$

   Si, au lieu d'avoir le rayon du cylindre, on a un point M_0 de ce cylindre,
   on écrit alors : $\dfrac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\right\|}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|} = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AM_0} \wedge \overrightarrow{u}\right\|}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|}$ qui se simplifie : $\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{AM_0} \wedge \overrightarrow{u}\right\|$

   En pratique, dans tous les cas, on élève tout au carré pour avoir une égalité équivalente sans racines carrées.
2. Pour un cône de révolution défini par son axe D dirigé par $\overrightarrow{u}$, son sommet Ω et son demi angle au sommet θ

On cherche l'ensemble des points M tels que l'angle $\widehat{\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{\Omega M}\right)}$ a pour mesure θ en tant qu'angle non orienté de droites, c'est à dire : $\widehat{\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{\Omega M}\right)} = \pm\,\theta_{[\pi]}$

ou encore : $\left|\cos\widehat{\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{\Omega M}\right)}\right| = |\cos\theta| \Leftrightarrow \dfrac{\left|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\Omega M}\right|}{\|\overrightarrow{u}\|\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|} = |\cos\theta|$

Si, au lieu d'avoir le demi-angle au sommet θ, on a un point M_0 du cône,

on écrit alors : $\dfrac{\left|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\Omega M}\right|}{\|\overrightarrow{u}\|\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|} = \dfrac{\left|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\Omega M_0}\right|}{\|\overrightarrow{u}\|\left\|\overrightarrow{\Omega M_0}\right\|}$ qui se simplifie : $\dfrac{\left|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\Omega M}\right|}{\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|} = \dfrac{\left|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\Omega M_0}\right|}{\left\|\overrightarrow{\Omega M_0}\right\|}$

En pratique, dans tous les cas, on élève tout au carré pour éviter les valeurs absolues et les racines carrées.