Sommaire

Dans tout le chapitre, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), de dimension finie ou non.
Les différentes parties de ce chapitre, formé de compléments, sont largement indépendantes.

1. Familles de vecteurs

I désigne un ensemble d'indices, non nécessairement fini. Par exemple $\{1,2,\ldots,n\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$...
$\mathscr{F}$ désigne la famille des $(u_i)_{i\in I}$

1.1. Famille libre

Définition : $\mathscr{F}$ est libre $\Leftrightarrow$ toute sous-famille finie de $\mathscr{F}$ est libre.
C'est à dire :

$$\forall J \subset I, J \text{ finie} \quad \sum_{j\in J} \alpha_j u_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J, \quad \alpha_j = 0$$

Exemple : Dans $\mathbb{R}[X]$, $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre.

1.2. Famille génératrice

Définition : $\mathscr{F}$ est génératrice $\Leftrightarrow$ tout vecteur de E est combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{F}$.
C'est à dire :

$$\forall u \in E, \exists J \subset I, J \text{ finie} \quad \exists \left(\alpha_j\right)_{j\in J} \quad \text{tel que } u = \sum_{j\in J} \alpha_j u_j$$

Exemple : Dans $\mathbb{R}[X]$, $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une famille génératrice.

1.3. Propriétés

- Ceci étend bien les définitions en dimension finie.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.
- $\varphi : E \to F$ linéaire, $(u_i)_{i\in I}$ génératrice de $E \Rightarrow (\varphi(u_i))_{i\in I}$ est génératrice de $\operatorname{Im}(E)$

Théorème : $\left.\begin{array}{r} (u_i)_{i\in I} \text{ libre} \\ \left(u, (u_i)_{i\in I}\right) \text{ liée} \end{array}\right\} \Rightarrow u$ est combinaison linéaire des $(u_i)_{i\in I}$

Démonstration : Une liaison contenant des coefficients non nuls contient nécessairement u avec un coefficient non nul...
On écrit : $\lambda\, u + \sum\limits_{i \in I} \lambda_i\, u_i = 0$
Si $\lambda = 0$, alors $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i\, u_i = 0$, mais comme cette famille est libre, chaque λ_i est nul, ce qui est impossible.
Si $\lambda \neq 0$, alors : $u = \dfrac{-\sum\limits_{i \in I} \lambda_i\, u_i}{\lambda}$, ce qui prouve le résultat anoncé. ■

Théorème : L'image d'une famille libre par une application linéaire **injective** est libre.

Démonstration : $\sum\limits_{j \in J} \alpha_j\, \varphi\left(u_j\right) = 0 \Rightarrow \varphi\left(\sum\limits_{j \in J} \alpha_j\, u_j\right) = 0 \Rightarrow \sum\limits_{j \in J} \alpha_j\, u_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J, \alpha_j = 0$ ■

2. Equations linéaires

Dans cette partie, E et F sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), de dimension finie ou non.
D'autre part, $\varphi : E \to F$ est une application linéaire.

2.1. Equation linéaire

Définition : Une équation linéaire est une équation du type $\varphi\left(u\right) = b$.
La résoudre, c'est chercher tous les vecteurs u tels que $\varphi\left(u\right) = b$.

Exemple : Il y a de très nombreux exemples différents. On peut citer :
- les systèmes linéaires classiques,
- les suites vérifiant une relation de récurrence linéaire, qu'on étudiera au chapitre suivant,
- les équations différentielles linéaires...

2.2. Equation linéaire homogène $(b = 0)$

Théorème : L'ensemble des solutions de $\varphi\left(u\right) = 0$ est un sous-espace vectoriel de E, noté $\ker\left(\varphi\right)$.
En particulier, $u = 0$ est toujours solution.

2.3. Equation linéaire non homogène $(b \neq 0)$

Théorème : Si $b \notin \mathrm{Im}\left(\varphi\right)$, alors l'ensemble des solutions est vide.
Si $b \in \mathrm{Im}\left(\varphi\right)$, alors $\exists u_0 \in E$, $\varphi\left(u_0\right) = b$.
L'ensemble des solutions est alors

$$u_0 + \ker\left(\varphi\right) = \left\{u \in E, \exists y \in \ker\left(\varphi\right), u = u_0 + y\right\}$$

Démonstration : $\left(u - u_0\right)$ est solution de l'équation homogène associée. ■

2.4. Superposition des solutions

Théorème : Soit l'équation linéaire $\varphi\left(u\right) = b_1 + b_2$, avec u_1 solution de $\varphi\left(u\right) = b_1$, et u_2 solution de $\varphi\left(u\right) = b_2$. Alors $u_1 + u_2$ est solution de $\varphi\left(u\right) = b_1 + b_2$, la solution générale étant $u_1 + u_2 + \ker\left(\varphi\right)$.

Démonstration : $\varphi\left(u_1 + u_2\right) = \varphi\left(u_1\right) + \varphi\left(u_2\right) = b_1 + b_2$. ■

3. Eléments propres d'un endomorphisme

Notation : E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), de dimension finie ou non.
$\varphi : E \to E$ est un endomorphisme.

3.1. Valeurs propres et vecteurs propres

Définition : $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in E$ est un couple valeur propre, vecteur propre de $\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq 0 \\ \varphi(u) = \lambda.u \end{cases}$

> Un vecteur propre n'est jamais nul.

Théorème : $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $\varphi \Leftrightarrow \ker(\varphi - \lambda.Id_E) \neq \{0\}$

Définition : L'ensemble des valeurs propres de φ est le **spectre** de φ.

3.2. Sous espaces propres

Définition :
Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de φ, on appelle **sous-espace propre** de φ associé à la valeur propre λ,

$$E_\lambda = \{u \in E, \varphi(u) = \lambda.u\}$$

C'est donc l'ensemble des vecteurs propres associés à λ auxquels on adjoint le vecteur nul.

Théorème : Le sous espace propre de φ associé à la valeur propre λ, E_λ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration : $E_\lambda = \ker(\varphi - \lambda.Id_E)$ est dons un sous espace vectoriel puisque c'est un noyau. ■

> On note $E_\lambda = \ker(\varphi - \lambda.Id_E)$ même quand λ n'est pas valeur propre de φ.
> D'une façon plus particulière, $E_0 = \ker(\varphi)$.
> Ainsi, 0 est valeur propre $\Leftrightarrow$ φ n'est pas injective.

Théorème : 2 sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

Démonstration : Soit $u \in E_\lambda \cap E_\mu$, alors $\varphi(u) = \lambda.u = \mu.u$, d'où $(\lambda - \mu).u = 0$ et comme $\lambda - \mu \neq 0$, $u = 0$. ■

3.3. Vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes

Théorème : E un $\mathbb{K}$-e.v., $\varphi \in \mathscr{L}(E)$,
$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$: n valeurs propres **distinctes 2 à 2**,
$u_1, u_2, \ldots, u_n$: n vecteurs propres associés,
alors la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est libre.

Démonstration : On pose

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$$

à laquelle on applique φ :

$$\alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n u_n = 0$$

à laquelle on retire λ_n fois la relation précédente, d'où :

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n) u_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_n) u_2 + \cdots + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n) u_{n-1} = 0$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que si $(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ est libre, alors $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est libre.
Comme (u_1) est libre, on a le résultat. ■

3.4. Exemples

1. Homothétie de rapport λ
   Une homothétie de rapport λ possède une unique valeur propre λ et $E_\lambda = E$.
   Tous les vecteurs, sauf le vecteur nul, sont propres.
2. $E = F \oplus G$
   - Soit p la projection sur F parallèlement à G.
     1 et 0 sont les deux valeurs propres, $E_1 = F$ et $E_0 = G$.
     On écrit la décomposition canonique selon la somme directe d'un vecteur non nul, propre pour λ, $u = v + w$, à laquelle on applique p, d'où $p(u) = v = \lambda v + \lambda w$ ce qui donne $(\lambda - 1)\, v + \lambda w = 0$.
     v et w ne sont pas tous les 2 nuls puisque u ne l'est pas.
     Comme λ ne peut à la fois être égal à 1 et à 0, v et w sont liés et donc l'un des 2 est nul. Ce qui entraîne $\lambda = 1$ et $w = 0$ ou $\lambda = 0$ et $v = 0$.
     Il ne reste qu'à conclure.
   - Soit s la symétrie par rapport à F, parallèlement à G.
     1 et -1 sont les deux valeurs propres, $E_1 = F$ et $E_{-1} = G$.
     Le résultat est immédiat en écrivant $s = 2p - Id$.
3. Soit $E = \mathscr{C}^0[\mathbb{R}]$ et $\varphi : E \to E$ telle que $\varphi(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$
   En un mot, $\varphi(f)$ est la primitive de f qui s'annule en 0.
   On va chercher les éléments propres de φ.
   Il faut d'abord vérifier que φ est bien un endomorphisme, c'est à dire que c'est une application de E dans E qui est linéaire.
   $\varphi(f)$ est clairement continue puisque c'est une primitive d'une application continue.
   De plus φ est bien linéaire par linéarité de l'intégration, φ est donc bien un endomorphisme.
   Cherchons en les éléments propres, c'est à dire les applications f non identiquement nulles et les scalaires λ tels que $\varphi(f) = \lambda \cdot f$
   On écrit cette égalité pour un x quelconque :
   $\varphi(f)(x) = \lambda f(x)$ ou encore $\displaystyle\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t = \lambda f(x)$ pour tout x réel.
   Si $\lambda = 0$, pour tout x réel, $\displaystyle\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t = 0$, en dérivant, $f(x) = 0$, f est l'application nulle et n'est donc pas un vecteur propre, 0 n'est donc pas valeur propre.
   Donc $\lambda \neq 0$, d'où f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et en dérivant, pour tout x réel, $f(x) = \lambda f'(x)$. On conserve la condition $f(0) = 0$ pour avoir une équivalence.
   f est donc solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre $\lambda y' - y = 0$, ce qui donne $y = K \exp(x/\lambda)$. La valeur en 0 nous donne $K = 0$ et donc f est encore l'application nulle...
   Finalement φ n'a pas de valeur propre.

4. Trace d'un endomorphisme et d'une matrice

Notons d'abord que la notion de trace est hors programme mais très pratique...

4.1. Trace d'une matrice

Définition : La trace d'une matrice, notée $tr(A)$, est la somme des éléments diagonaux. avec les notations classiques, pour une matrice $n \times n$, on a :

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Exemple : La trace de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ est $1+4+7=12$.

Théorème : A,B deux matrices $n \times n$, alors,

$$\mathbf{tr}\,(AB) = \mathbf{tr}\,(BA)$$

Démonstration : L'élément $i^{\text{ème}}$ ligne et colonne de AB est $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ji}$,

$$\mathbf{tr}\,(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}\, a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, a_{ji} = \mathbf{tr}\,(BA)$$

car les indices de sommation sont muets. ■

Théorème : 2 matrices semblables ont la même trace.

Démonstration : $A' = P^{-1}AP$,

$$\mathbf{tr}\,(A') = \mathbf{tr}\left(P^{-1}AP\right) = \mathbf{tr}\left(P^{-1}\,(AP)\right) = \mathbf{tr}\left((AP)\,P^{-1}\right) = \mathbf{tr}\left(APP^{-1}\right) = \mathbf{tr}\,(A)$$

■

Exemple : Les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ ne diffèrent que par l'interversion des deux premières colonnes mais ne sont pas semblables puisqu'elles n'ont pas la même trace !...

4.2. Trace d'un endomorphisme

Comme 2 matrices semblables ont la même trace, la trace d'un endomorphisme est définie comme la trace de sa matrice dans n'importe quelle base.

5. Compléments

5.1. Avec Maple

Comme pour tout l'algèbre linéaire, il faut d'abord charger le pack `linalg` :
`> with(linalg);`
`> linsolve(A,B);` permet de résoudre les systèmes linéaires écrits matriciellement, `A` étant la matrice et `B` le vecteur second membre. La réponse est le, ou les, vecteurs X tels que $AX = B$.
`> eigenvals(A);` fournit les valeurs propres d'une matrice et
`> eigenvects(A);` les valeurs propres et une base de chaque vecteur propre. Dans la mesure, bien sûr, où Maple sait résoudre l'équation qui permet de calculer les valeurs propres...
Comme toujours avec Maple, on se méfiera quand la matrice ou le vecteur dépendent d'un paramètre. La réponse fournie correspond en général au cas général.

5.2. Les mathématiciens du chapitre

Cayley Arthur 1821-1895 Mathématicien anglais, on lui doit la notion de groupe et il passe pour être l'inventeur des matrices.

Jordan Camille 1838-1922 Ce mathématicien français est célèbre pour ses travaux en algèbre linéaire, entre autres...

Peano Giuseppe 1858-1932 Italien, c'est lui qui donna la définition axiomatique des espaces vectoriels.