Sommaire

Le but est de déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad a\,u_{n+2} + b\,u_{n+1} + c\,u_n = d,\quad a,b,c,d \in \mathbb{K} \tag{1}$$

On considère E l'espace vectoriel des suites sur $\mathbb{K}$, et

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (a\,u_{n+2} + b\,u_{n+1} + c\,u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$$

φ est clairement linéaire. Il s'agit de résoudre

$$\varphi\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (d)_{n\in\mathbb{N}}$$

où $(d)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante. On se retrouve donc face à une équation linéaire.
On va donc chercher les solutions de l'équation homogène associée :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad a\,u_{n+2} + b\,u_{n+1} + c\,u_n = 0$$

Ces solutions forment un sous espace vectoriel de E.
Il suffira d'ajouter une suite qui est solution particulière de (1).

1. Suites vérifiant $u_{n+1} - a\,u_n = b$

1.1. $u_{n+1} - a\,u_n = 0$

Ce sont les suites géométriques de raison a, $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = a^n\,u_0.$

1.2. $u_{n+1} - a\,u_n = b$

On cherche d'abord une solution particulière sous forme de suite constante $v_n = k$, ce qui donne $(1-a)\,k = b$.

- Si $a \neq 1$, on trouve $k = \dfrac{b}{1-a}$, et donc $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = a^n\,\alpha + \dfrac{b}{1-a}$ où α s'exprime en fonction des conditions initiales : $\alpha = u_0 - \dfrac{b}{1-a}$.
- Si $a = 1$, la suite est arithmétique, $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = u_0 + nb$

Une fois qu'on a l'expression générale de la solution, on tient compte des conditions initiales éventuelles.

2. Suites vérifiant $u_{n+2} + a\,u_{n+1} + b\,u_n = c$

2.1. $u_{n+2} + a\,u_{n+1} + b\,u_n = 0$

Théorème : L'ensemble des suites vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} + a\,u_{n+1} + b\,u_n = 0$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension 2.

Démonstration : La structure d'espace vectoriel est donnée par le fait que c'est le noyau d'une application linéaire.
Une suite est déterminée par ses deux premiers termes.
On considère $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 1$.
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_n = u_0\,\alpha_n + u_1\,\beta_n$$

vérifie la relation de récurrence et $v_0 = u_0$, $v_1 = u_1$, ce qui prouve que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille génératrice, donc une base de l'ensemble des solutions. ■

En pratique, on recherche les suites géométriques de raison non nulle r vérifiant

$$u_{n+2} + a\,u_{n+1} + b\,u_n = 0$$

ce qui revient à chercher les solutions de

$$r^2 + a\,r + b = 0$$

- 2 racines distinctes r_1,r_2 (ce qui correspond sur $\mathbb{C}$, à $\Delta \neq 0$, ou sur $\mathbb{R}$, à $\Delta > 0$)
  On a alors
  $$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha\,r_1^n + \beta\,r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$$
- 1 racine double r (ce qui correspond à $\Delta = 0$)
  Montrons que $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie aussi la relation de récurrence.
  $$\begin{aligned}(n+2)\,r^{n+2} + a\,(n+1)\,r^{n+1} + b\,n\,r^n &= n\,r^n\left(r^2 + a\,r + b\right) + r^{n+1}\,(2r+a)\\ &= 0 \text{ car } r = \frac{-a}{2}\end{aligned}$$
  L'ensemble des solutions est donc
  $$(\alpha\,r^n + \beta\,n\,r^n)_{n\in\mathbb{N}}$$
- Pas de racine (ce qui correspond sur $\mathbb{R}$, à $\Delta < 0$)
  On résout sur $\mathbb{C}$, $r_2 = \overline{r_1}$, $r_1 = |r|\,e^{i\theta}$, $\left(|r|^n\,e^{in\theta}\right)$ et $\left(|r|^n\,e^{-in\theta}\right)$ sont donc solution sur $\mathbb{C}$.
  Ce qui fait que $\left(|r|^n \cos n\theta\right)$ et $\left(|r|^n \sin n\theta\right)$ sont solution sur $\mathbb{C}$ par combinaison linéaire de solutions.
  Mais ces solutions sont réelles et donc **aussi** solution sur $\mathbb{R}$!!! Elles forment clairement une famille libre et forment donc une base de l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$.
  Les solutions sont donc
  $$\left(\alpha\,|r|^n \cos n\theta + \beta\,|r|^n \sin n\theta\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

2.2. $u_{n+2} + a\,u_{n+1} + b\,u_n = c$

On cherche donc une solution particulière sous la forme...

- une suite constante $u_n = k$
  On obtient $k\,(1+a+b) = c$, on a donc une solution quand $1+a+b \neq 0$.
- quand $(1+a+b=0)$, on cherche une suite arithmétique $u_n = k\,n$
  On obtient $k\,((n+2)+(n+1)\,a+n\,b) = c$, d'où $k\,(2+a) = c$, on a donc une solution quand $2+a \neq 0$.
- quand on a à la fois : $\left\{\begin{aligned} 1+a+b &= 0\\ 2+a &= 0\end{aligned}\right\}$, on cherche une suite $u_n = k\,n^2$
  On obtient $k\left((n+2)^2 + (n+1)^2\,a + n^2 b\right) = c$, d'où $k\,(4+a) = c$ et donc $2k = c$. On a donc toujours une solution.

Une fois qu'on a l'expression générale de la solution, on tient compte des conditions initiales éventuelles.

3. Avec Maple

Comme pour tout l'algèbre linéaire, il faut d'abord charger le pack `linalg` :

```
> with(linalg);
```

C'est ensuite `rsolve` qui permet de rechercher ces suites. Donnons un exemple :

```
> rsolve(u(n)=-3*u(n-1)-2*u(n-2),u);
```