Sommaire

Le but de ce chapitre est, pour un endomorphisme donné, de rechercher une base dans laquelle son expression sera la plus « simple » possible ou de rechercher les conditions que doit vérifier une telle base.
Pour une matrice donnée A, le but est de trouver une matrice semblable à A qui soit la plus « simple » possible.

1. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie, d'une matrice

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension n, $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathscr{B}$ est une base de E.
φ est un endomorphisme de E. A est la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.

1.1. Polynôme caractéristique

Définition : On appelle polynôme caractéristique de φ, ou de A, le déterminant de $\varphi - \lambda.Id_E$, ou de $A - \lambda I_n$, noté

$$P_\varphi(\lambda) = \det(\varphi - \lambda.Id_E) = P_A(\lambda) = \det(A - \lambda.I_n)$$

Théorème : $P_\varphi(\lambda) = P_A(\lambda)$ est un polynôme de degré n en λ.
Son terme de plus haut degré est $(-1)^n \lambda^n$.
Son terme constant est $\det(\varphi) = \det(A)$.
En pratique, il se calcule par $P_\varphi(\lambda) = P_A(\lambda) = \det(A - \lambda.I_n)$ où $A = \mathscr{M}_B(\varphi)$ et I_n est la matrice idéntité.

Démonstration : $A - \lambda.I_n$ est la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de $\varphi - \lambda.Id_E$ et comme un déterminant se calcule dans n'importe quelle base, on a $P_\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda.I_n)$.

$$P_\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{1,1}-\lambda)\Delta_{1,1} - a_{2,1}\Delta_{2,1} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n,1}\Delta_{n,1}$$

Par récurrence, $-a_{2,1}\Delta_{2,1} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n,1}\Delta_{n,1}$ ne peut contenir de terme en λ^n, donc le terme de plus haut degré est celui de $(a_{1,1}-\lambda)\Delta_{1,1}$, c'est à dire celui de $-\lambda\Delta_{1,1}$. Par récurrence, c'est donc $(-1)^n \lambda^n$.
Enfin, $\lambda = 0$ fournit le terme constant $P_\varphi(0) = \det(\varphi - 0.Id_E) = \det(\varphi)$. ■

Théorème : Les racines sur $\mathbb{K}$ de $P_\varphi(\lambda) = P_A(\lambda)$ sont **exactement** « les » valeurs propres de φ ou de A.

Démonstration : Si λ_i est valeur propre de φ, $(\varphi - \lambda_i.Id_E)$ n'est pas injective, donc n'est pas un isomorphisme et donc son déterminant est nul.
Réciproquement, si $\det(\varphi - \lambda_i.Id_E) = 0$, $(\varphi - \lambda_i.Id_E)$ n'est pas injective, $\ker(\varphi - \lambda_i.Id_E) \neq \{0\}$ et donc λ_i est valeur propre de φ. ■

Théorème : Si la matrice d'un endomorphisme dans une certaine base est triangulaire, les valeurs propres de cet endomorphismes sont les termes de la diagonale de cette matrice.

Démonstration : $\det(A - \lambda.I_n)$ est le produit des éléments diagonaux, car cette matrice est toujours triangulaire. Les racines de ce polynôme en λ sont bien les éléments de la diagonale de A. ■

1.2. Ordre de multiplicité des valeurs propres, dimension des sous espaces propres

Définition : L'ordre de multiplicité de λ_i racine de $P_\varphi(\lambda) = P_A(\lambda)$ est l'ordre de multiplicité de λ_i valeur propre de φ ou de A.

On parle donc de valeur propre simple, double, multiple...

> Chaque valeur propre est toujours donnée avec son ordre de multiplicité.

Théorème : Pour λ_i valeur propre de φ ou de A,

$$1 \leqslant \dim E_{\lambda_i} \leqslant \text{Ordre de multiplicité de la valeur propre } \lambda_i$$

Démonstration : Comme λ_i est valeur propre de φ, $\dim E_{\lambda_i} \geqslant 1$.
Soit $p = \dim E_{\lambda_i}$ et $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E_{λ_i} qu'on complète par $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ en une base de E.

Dans cette base, φ a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \ldots & 0 & a_{1,p+1} & \ldots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_i & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & a_{p+1,p+1} & \ldots & a_{p+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_{n,p+1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ d'où

$$P_\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda_i - \lambda & 0 & \ldots & 0 & a_{1,p+1} & \ldots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_i - \lambda & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & a_{p+1,p+1} - \lambda & \ldots & a_{p+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_{n,p+1} & \ldots & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda_i - \lambda)^p \begin{vmatrix} a_{p+1,p+1} - \lambda & \ldots & a_{p+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,p+1} & \ldots & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix}$$

en remarquant par exemple que la matrice est triangulaire par blocs.
Ceci prouve que λ_i est racine de $P_\varphi(\lambda)$ d'ordre au moins p. ■

> Si λ_i est une valeur propre simple, alors $\dim E_{\lambda_i} = 1$

2. Diagonalisation d'un endomorphisme en dimension finie, d'une matrice

2.1. Diagonalisibilité

Définition : Un endomorphisme φ de E est diagonalisable
$\Leftrightarrow$ E possède une base formée de vecteurs propres de φ
$\Leftrightarrow$ la matrice A est diagonalisable.

> Dans une base de vecteurs propres, la matrice de φ est diagonale. Les valeurs propres se trouvent sur la diagonale, chacune autant de fois que son ordre de multiplicité.
> A est donc semblable à une matrice diagonale.

2.2. Polynôme scindé

Définition : Un polynôme scindé est un polynôme qui peut se factoriser en produit d'expressions du 1^{er} degré.

- $X^2+2X+1=(X+1)(X+1)$ est scindé sur $\mathbb{R}$ comme sur $\mathbb{C}$,
- $X^2+X+1=(X+j)(X+j^2)$ est scindé sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

En particulier, sur $\mathbb{C}$, tous les polynômes sont scindés.

2.3. Condition nécessaire et suffisante de diagonalisibilité

Théorème : E de dimension n, $\varphi \in \mathscr{L}(E)$,
φ est diagonalisable $\Leftrightarrow$ la somme des dimensions des sous espaces propres est n $\Leftrightarrow$ A est diagonalisable.

La démonstration est admise.

Théorème : (Condition nécessaire et suffisante)

$$\varphi, \text{ ou } A \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \begin{cases} P_\varphi(\lambda)=P_A(\lambda) \text{ est scindé et,} \\ \text{Pour chaque } \lambda_i \text{ multiple, } \dim E_{\lambda_i} = \text{ordre de multiplicité de } \lambda_i \end{cases}$$

Théorème : (condition suffisante)
Si φ, ou A, admet n valeurs propres distinctes, alors φ, ou A, est diagonalisable.

Démonstration : Toutes les valeurs propres sont simples, chaque sous espace propre est donc de dimension 1... ∎

> Dans le cas où l'endomorphisme est diagonalisable, on obtient une base de vecteurs propres en mettant bout à bout une base de chaque sous espace propre.

2.4. Matrice diagonale semblable

Théorème : Si A est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ distinctes ou confondues, de vecteurs propres associés $e_1, e_2, \ldots, e_n$. On appelle P la matrice de passage constituée en colonnes, et dans cet ordre, des coordonnées de $e_1, e_2, \ldots, e_n$ écrits dans la base d'origine. Alors

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On ne suivra la méthode donnée que si n est « petit » et quand l'énoncé ne guide pas vers une autre.

> A diagonalisable **n'est pas** diagonale, c'est D qui l'est...

2.5. Diagonalisibilité et diagonalisation

Quand une matrice A est **diagonalisable**, une erreur courante est de dire que, *dans une certaine base,* A est diagonale, ce qui est bien sûr grossièrement faux et même stupide.
On a simplement une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$ ou bien $D = P^{-1}AP$.

La confusion provient de ce que A et D sont les matrices d'un **même** endomorphisme dans deux bases différentes...
Il est par contre exact de dire que si un endomorphisme φ est diagonalisable, et s'il est de matrice A dans la base $\mathscr{B}$, il existe une base $\mathscr{B}'$ dans laquelle la matrice de φ est D, diagonale.
P étant la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$, on a alors : $A = PDP^{-1}$ et $D = P^{-1}AP$.

2.6. Matrice symétrique réelle

Théorème : Une matrice **symétrique réelle** est diagonalisable avec, au besoin, une matrice de passage orthogonale.

Ce théorème, très utile en pratique, n'est ici que pour mémoire, on se reportera au chapitre suivant.

3. Recherche pratique

3.1. Diagonalisibilité

- On calcule $P_A(\lambda)$.
  - Si $P_A(\lambda)$ n'est pas scindé, A n'est pas diagonalisable. On a terminé.
- On factorise $P_A(\lambda)$, en particulier, on cherche les valeurs propres multiples.
  - S'il n'y en a pas, A est diagonalisable. On a terminé.

  On cherche la dimension de chaque sous espace propre associé à une valeur propre multiple.
  On utilisera parfois $\dim E_{\lambda_i} = n - rang\,(A - \lambda_i.I_n)$.
  - Si chaque dimension est l'ordre de multiplicité de la valeur propre, A est diagonalisable. On a terminé.
  - Sinon, A n'est pas diagonalisable. On a terminé.

3.2. Exemples

- $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Son polynôme caractéristique est : $4\,\lambda^2 + 1$ qui n'a pas de racines réelles, et donc, cette matrice n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
- $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable. En effet, 2 est valeur propre double et le sous-espace propre est de dimension 1.

  En effet, $A - 2\,I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1 et donc E_2 est de dimension $2 - 1 = 1 \neq 2$.

3.3. Diagonalisation

Dans ce paragraphe, on supposera que A est effectivement diagonalisable.
- Calculer $P_A(\lambda)$.
- Factoriser $P_A(\lambda)$, chercher les valeurs propres.
- Pour chaque valeur propre, chercher une base du sous espace propre associé.
- On obtient une base de vecteurs propres en mettant bout à bout les différentes bases des sous espaces propres.

3.4. Exemples

On va diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $n \geqslant 3$.
Cette matrice est symétrique réelle, donc diagonalisable.

a/ Première méthode

La matrice est clairement de rang 2, 0 est donc valeur propre d'ordre exactement $n-2$ compte tenu de la diagonalisibilité.

Le sous-espace propre, qui est le noyau, est facile à déterminer, il est défini par $\begin{cases} x_n = 0 \\ x_1 + \cdots + x_{n-1} = 0 \end{cases}$

Il ne nous manque que la ou les deux valeurs propres non nulles. Compte tenu de la trace nulle, ce sont deux valeurs propres opposées.

On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tels que $AX = \lambda X$, avec $\lambda \neq 0$,

ce qui donne $\begin{cases} x_n = \lambda x_1 \\ x_n = \lambda x_2 \\ \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 + \cdots + x_{n-1} = \lambda x_n \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x_n = \lambda x_1 \\ x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} \\ (n-1)\, x_1 = \lambda^2 x_1 \end{cases}$

On utilise alors cette dernière équation. $x_1 = 0$ entraîne $X = 0$ ce qui est impossible. On a donc $\lambda = \pm\sqrt{n-1}$ qui sont les deux autres valeurs propres. Les sous-espaces propres correspondants sont engendrés par $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$.

b/ Deuxième méthode

On va plus classiquement chercher le polynôme caractéristique.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}_n = -\lambda\Delta_{n-1} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$= -\lambda\Delta_{n-1} - (-\lambda)^{n-2}$ en développant selon la première ligne puis le déterminant restant selon la première colonne.
On obtient finalement $\Delta_n = (-1)^n \left(\lambda^n - (n-1)\, \lambda^{n-2}\right)$ par simple récurrence facile à obtenir. Ce qui fournit bien sûr les mêmes valeurs propres qu'avec la méthode précédente.
Il ne reste qu'à chercher les sous-espaces propres correspondants.

4. Réduction d'un endomorphisme non diagonalisable

4.1. Trigonalisation

Théorème : E de dimension n, $\varphi \in \mathscr{L}(E)$, tel que le polynôme caractéristique de φ est scindé, alors il existe une base où la matrice de φ est triangulaire.
Les valeurs propres se trouvent sur la diagonale, chacune autant de fois que son ordre de multiplicité.

Théorème : A une matrice carrée telle que le polynôme caractéristique de A est scindé, alors il existe une matrice triangulaire T semblable à A.
Les valeurs propres se trouvent sur la diagonale, chacune autant de fois que son ordre de multiplicité.

La démonstration de ces deux théorèmes est admise.

4.2. Recherche d'une base trigonalisante

On va travailler sur un exemple courant :
E est de dimension 3, λ_1 est valeur propre simple, λ_2 valeur propre double de φ.
De plus $\dim E_{\lambda_1} = \dim E_{\lambda_2} = 1$. φ n'est donc pas diagonalisable mais est trigonalisable.
En principe, dans une telle recherche, l'énoncé doit vous guider. Ici,

- On cherche e_1 base de E_{λ_1}
- On cherche e_2 base de E_{λ_2}
- On cherche e_3 tel que $(\varphi - \lambda_2.Id_E)(e_3) = e_2$
- On vérifie que (e_1, e_2, e_3) est bien une base de E

  Dans cette base, la matrice de φ est $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

4.3. Triangularisation d'un endomorphisme ou d'une matrice nilpotents

Rappelons qu'une matrice A est nilpotente si et seulement si il existe p tel que $A^p = 0$. On a la même définition pour un endomorphisme nilpotent.
Si X est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ, alors il est aussi vecteur propre de A^p pour la valeur propre λ^p.
Que l'on travaille sur $\mathbb{C}$ ou sur $\mathbb{R}$, le polynôme caractéristique est scindé et l'unique valeur propre est nulle.
A est donc semblable à une matrice strictement triangulaire.

On peut même montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ où les ε_i valent 0 ou 1. Mais ceci est hors-programme.

5. Compléments

5.1. Utilisation de la trace

Rappelons que la trace d'une matrice est une notion hors-programme souvent présente dans les problèmes. La trace d'un endomorphisme est la somme de éléments diagonaux de sa matrice dans une base quelconque. Ce qui nous donne :

Théorème : Quand le polynome caractéristique est scindé, la trace d'un endomorphisme, qui est la somme des éléments diagonaux de sa matrice dans une base quelconque, est égale à la somme des valeurs propres.

Démonstration : Il suffit de se placer dans une base où la matrice est triangulaire. Les valeurs propres sont alors sur la diagonale. ∎

Ceci permet souvent de vérifier la cohérence des calculs de valeurs propres...

5.2. Forme ultime en dimension 3

On considère ici un endomorphisme en dimension 3 dont l**e polynôme caractéristique est scindé**.
On va décrire la **meilleure** forme que peut avoir sa matrice dans une certaine base, selon les ordres de multiplicité des valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.

a/ Trois valeurs propres simples

L'endomorphisme est diagonalisable et a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$ dans une base bien choisie.

b/ Deux valeurs propres, une simple et une double

- Si l'endomorphisme est diagonalisable, il a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ dans une base bien choisie.
- Si l'endomorphisme n'est pas diagonalisable, il a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ dans une base bien choisie.
  On constitue cette base comme dans l'exemple étudié au paragraphe 4.2..

c/ Une valeur propre triple

- Si l'endomorphisme est diagonalisable, il a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ dans une base bien choisie.
  C'est l'homothétie de rapport λ. L'endomorphisme a d'ailleurs cette matrice dans n'importe quelle base ...
- Si l'endomorphisme n'est pas diagonalisable, il a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ si le sous-espace propre est de dimension 2 ou $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ si le sous-espace propre est de dimension 1, toujours dans une base bien choisie.
  Ici, l'énoncé doit vous guider dans la recherche de cette base.

5.3. Puissances de matrices

Un problème courant est de calculer la puissance $m^{ème}$ d'une matrice. Même si l'énoncé doit vous guider, on passe ici en revue quelques cas habituels.

a/ Matrice diagonalisable

$$D = P^{-1}AP$$

et donc

$$\begin{aligned} A &= PDP^{-1} \\ A^2 &= PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} \end{aligned}$$

et par récurrence très facile

$$A^m = PD^mP^{-1}$$

de plus, si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors $D^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix}$

Il ne reste « qu'un calcul » de produit de 3 matrices pour terminer, à savoir : $A^m = PD^mP^{-1}$.

b/ Utilisation d'une matrice dont une puissance est nulle

Si $A = (B + C)$, avec $BC = CB$, alors $A^m = \sum\limits_{k=0}^{m} \mathrm{C}_m^k B^{m-k} C^k$ par la formule du binôme.
Si, de plus, $C^3 = 0$ par exemple, alors $A^m = \sum\limits_{k=0}^{2} \mathrm{C}_m^k B^{m-k} C^k$ car tous les autres termes sont nuls.
Comme enfin, dans ce cas, on connait les puissances de B (qui est le plus souvent diagonale...).
Heureusement que l'énoncé vous guide.
Il arrive qu'on utilise une combinaison des deux méthodes précédentes quand la matrice est simplement trigonalisable.

Si A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La puissance $m^{ème}$ de la première matrice est facile à obtenir, la deuxième est bien nilpotente et elles commutent... On calcule donc A'^m selon la deuxième méthode puis A^m avec la matrice de passage.

c/ Utilisation d'un polynôme annulateur

Supposons par exemple que

$$A^2 - 3A + 2I_n = 0$$

On va montrer deux façons classiques de procéder.

- Par division euclidienne de polynômes
  On factorise

  $$X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$$

  Par simple divion euclidienne, on écrit :

  $$X^m = Q(X)(X-1)(X-2) + aX + b$$

  On pose alors successivement $X = 1$ puis $X = 2$.

Ce qui donne $\left\{\begin{array}{l} 1 = a + b \\ 2^m = 2a + b \end{array}\right.$ d'où $\left\{\begin{array}{l} a = 2^m - 1 \\ b = 2 - 2^m \end{array}\right.$ et enfin

$$A^m = (2^m - 1)\, A + (2 - 2^m)\, I_n$$

Cette méthode est intéressante quand le degré du polynôme annulateur est petit. Elle est applicable quelle que soit la dimension de la matrice A.

- Par suites récurrentes linéaires
  On a :

$$\begin{aligned} A^2 &= 3A - 2I_n \\ A^3 &= 3A^2 - 2A \\ &= 3\,(3A - 2I_n) - 2A \\ &= 7A - 6I_n \end{aligned}$$

Par récurrence immédiate, les puissances de A sont donc combinaison linéaire de A et de I :

$$A^m = a_m A + b_m I_n$$

On écrit alors A^{m+1} de 2 façons :

$$\begin{aligned} A^{m+1} &= a_m A^2 + b_m A \\ &= a_m\,(3A - 2I_n) + b_m A \\ &= (3a_m + b_m)\, A - 2a_m I_n \\ &= a_{m+1} A + b_{m+1} I_n \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= 3a_m + b_m \\ b_{m+1} &= -2a_m \end{aligned}$$

Ou encore :

$$a_{m+2} = 3a_{m+1} - 2a_m$$

Il ne reste qu'à rechercher, en tenant compte des conditions initiales, cette suite récurrente linéaire.

5.4. Avec Maple

Comme pour tout l'algèbre linéaire, il faut d'abord charger le pack `linalg` :
`> with(linalg);`
`> charpoly(A,lambda);` calcule le polynôme caractéristique de A de variable λ.
`> eigenvals(A);` fournit les valeurs propres d'une matrice et
`> eigenvects(A);` fournit les valeurs propres et une base de chaque sous espace propre. Dans la mesure, bien sûr, où Maple sait résoudre l'équation qui permet de calculer les valeurs propres...
On aura parfois intérêt à voir les racines du polynôme caractéristique de A par :
`> solve(charpoly(A,lambda),lambda);`
De plus, comme toujours, on se méfiera des cas particuliers quand il y a des paramètres...

5.5. Les mathématiciens du chapitre

Cayley Arthur 1821-1895 On doit à cet anglais de nombreux travaux sur les matrices, la diagonalisation, la notion de polynôme caractéristique...