Sommaire

1. Convergence des Séries Numériques 1
1.1. Nature d'une série numérique 1
1.2. Séries géométriques 1
1.3. Condition élémentaire de convergence . 2
1.4. Suite et série des différences 2
2. Opérations sur les Séries Convergentes 2
2.1. Somme de 2 séries 2
2.2. Produit par un scalaire 2
3. Séries à termes positifs 3
3.1. Séries à termes positifs 3
3.2. Critère de comparaison 3
3.3. Critère d'équivalence 3
3.4. Comparaison à une intégrale impropre . 4
3.5. Règle de Riemann 5
3.6. Règle de d'Alembert 5
4. Séries Absolument Convergentes 6
4.1. Convergence absolue 6
4.2. Conv. des séries absolument conv. . . . 6
4.3. Une convergence absolue 6
5. Séries Numériques Réelles Alternées 6
5.1. Séries alternées 6
5.2. Critère spécial des séries alternées . . . 6
6. Compléments 7
6.1. Avec Maple 7
6.2. Les mathématiciens du chapitre 8

L'objet de l'étude des séries numériques est de donner un sens à des sommes infinies de nombres réels ou complexes et, éventuellement, de les calculer.

1. Convergence des Séries Numériques

1.1. Nature d'une série numérique

Définition : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On appelle **suite des sommes partielles** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Définition :
On dit que la **série de terme général** u_n**, converge** $\Leftrightarrow$ la suite des sommes partielles $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Sinon, on dit qu'elle **diverge**.

Notation : La **série de terme général** u_n se note $\sum u_n$.

Définition : Dans le cas où la série de terme général u_n converge, la limite, notée s, de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **somme** de la série et on note : $s = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.
Le reste d'ordre n de la série est alors noté r_n et il vaut : $r_n = s - s_n$.

Définition : La **nature** d'une série est le fait qu'elle converge ou diverge.

Etudier une série est donc simplement étudier une suite, la suite des sommes partielles de (u_n). Le but de ce chapitre est de développer des techniques particulières pour étudier des séries sans nécessairement étudier la suite des sommes partielles.
Dans certains cas, on reviendra à la définition en étudiant directement la convergence de la suite des sommes partielles.

> La convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes...

1.2. Exemple fondamental : les séries géométriques

Théorème : La série de terme général x^n converge $\Leftrightarrow |x| < 1$.
De plus, la somme est : $s = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.

Démonstration : $\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ pour $x \neq 1$.
$\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ n'a de limite finie que si $|x| < 1$, cette limite est alors $\dfrac{1}{1-x}$.
D'autre part, pour $x = 1$, $\sum_{k=0}^{n} x^k = n+1$ diverge. ■

> La raison d'une suite géométrique est le coefficient par lequel il faut multiplier chaque terme pour obtenir le suivant.
> La somme des termes d'une série géométrique convergente est donc : $\dfrac{\text{« le premier terme »}}{1 - \text{« la raison »}}$.
> Ceci prolonge et généralise la somme des termes d'une suite géométrique qui est :
>
> $$\frac{\text{« le premier terme »} - \text{« le premier terme manquant »}}{1 - \text{« la raison »}}$$
>
> Quand la série converge, il n'y pas de termes manquants... La formule est la même.

1.3. Condition nécessaire élémentaire de convergence

Théorème : $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Démonstration : $\sum u_n$ converge $\Rightarrow (s_n)$ converge vers $s \Rightarrow (s_{n+1})$ converge vers s
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_{n+1} - s_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. ■

> Si une série converge, son terme général tend vers 0.
> Dans le cas où le terme général ne tend pas vers 0, on dit que la série **diverge grossièrement**.

1.4. Suite et série des différences

Théorème : La suite (v_n) converge $\Leftrightarrow$ la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge.

Démonstration : On considère $\sum (v_{n+1} - v_n)$, sa suite des sommes partielles est (s_n) avec

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0$$

Les suites (s_n) et (v_{n+1}) sont de même nature, il en est de même de (v_n). ■

2. Opérations sur les Séries Convergentes

2.1. Somme de 2 séries

Théorème : $\sum u_n$ et $\sum u'_n$ convergent et ont pour somme s et s'
$\Rightarrow \sum (u_n + u'_n)$ converge et a pour somme $(s + s')$.

Démonstration : On applique simplement le théorème équivalent sur les suites, appliqué bien sûr aux suites des sommes partielles. ■

2.2. Produit par un scalaire

Théorème : $\sum u_n$ converge et est de somme $s, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \sum (\lambda\, u_n)$ converge et est de somme $\lambda\, s$.

Démonstration : On applique encore le théorème équivalent sur les suites à la suite des sommes partielles. ■

Il y a bien sûr une notion sous-jacente d'espace vectoriel des séries convergentes.

3. Séries à termes positifs

3.1. Séries à termes positifs

Définition : On dit qu'une série $\sum u_n$ est une série à termes positifs $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\, u_n \geqslant 0$.

Définition : On dit qu'une série $\sum u_n$ est une série à termes positifs à partir d'un certain rang

$$\Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant 0$$

3.2. Critère de comparaison

Théorème : $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries positives à partir d'un certain rang N, telles que

$$\forall n \geqslant N,\, u_n \leqslant v_n$$

Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration : Seule la première assertion est à montrer, l'autre est équivalente.
On le montre pour les séries positives $(N = 0)$.
On pose $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, $s'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$et $s' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$, on a $s_n \leqslant s'_n$.
Les suites (s_n) et (s'_n) sont croissantes et la deuxième converge. On a donc $s'_n \leqslant s'$. Ce qui prouve que (s_n) est croissante majorée et donc converge.

Pour le cas de séries positives à partir du rang N, on considère les sommes partielles $s_n = \sum\limits_{k=N}^{n} u_k$... ∎

Exemple : Etudions la convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln n}{n2^n}$.
C'est une série à termes positifs (ou plus simplement positive), on va pouvoir utiliser le critère de comparaison.
A l'infini, $\dfrac{\ln n}{n}$ tend vers 0 et donc $\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$ est une suite bornée par A. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, 0 \leqslant \dfrac{\ln n}{n} \leqslant A$ ce qui donne $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, 0 \leqslant \dfrac{\ln n}{n2^n} \leqslant \dfrac{A}{2^n}$ qui est le terme général d'une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, donc convergente.
Ceci prouve que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln n}{n2^n}$ converge.

3.3. Critère d'équivalence

Théorème : $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries positives à partir d'un certain rang N, telles que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration : A partir d'un certain rang N, on a $0 \leqslant \frac{1}{2}u_n \leqslant v_n \leqslant 2u_n$.
Si $\sum u_n$ converge, $\sum 2u_n$ converge et donc $\sum v_n$ converge.
Si $\sum v_n$ converge, $\sum \dfrac{1}{2}u_n$ converge et donc $\sum u_n$ converge. ∎

> On peut remarquer que le critère d'équivalence est, par liné arité, applicable à des séries de signe constant à partir d'un certain rang. En effet, la convergence de $\sum u_n$ équivaut à celle de $\sum -u_n$.
> Par ailleurs, on veillera à appliquer le critère d'équivalence au **terme général** : u_n, et non à la série : $\sum u_n$.

Exemple : Etudions la convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{1+2^n}$.

C'est une série à termes positifs (ou plus simplement positive), on va pouvoir utiliser le critère d'équivalence.
$\dfrac{1}{1+2^n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2^n}$ qui est le terme général d'une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, donc convergente.
Ceci prouve que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+2^n}$ converge.

3.4. Comparaison à une intégrale impropre

Théorème : Soit f une application **positive et décroissante** sur $[a,+\infty[$,
alors la série $\sum f(n)$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
Et si elles convergent, $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

Démonstration : Remarquons d'abord que, comme $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante,
$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\Leftrightarrow$ la suite $\left(\displaystyle\int_a^p f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ converge.
On prendra pour la démonstration $a=0$. Comme f décroit sur $[n,n+1]$,

$$\forall x \in [n,n+1]\,,\, f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$$

et en intégrant, comme on peut le voir sur la figure 1, ci-dessous : $f(n+1) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n)$.

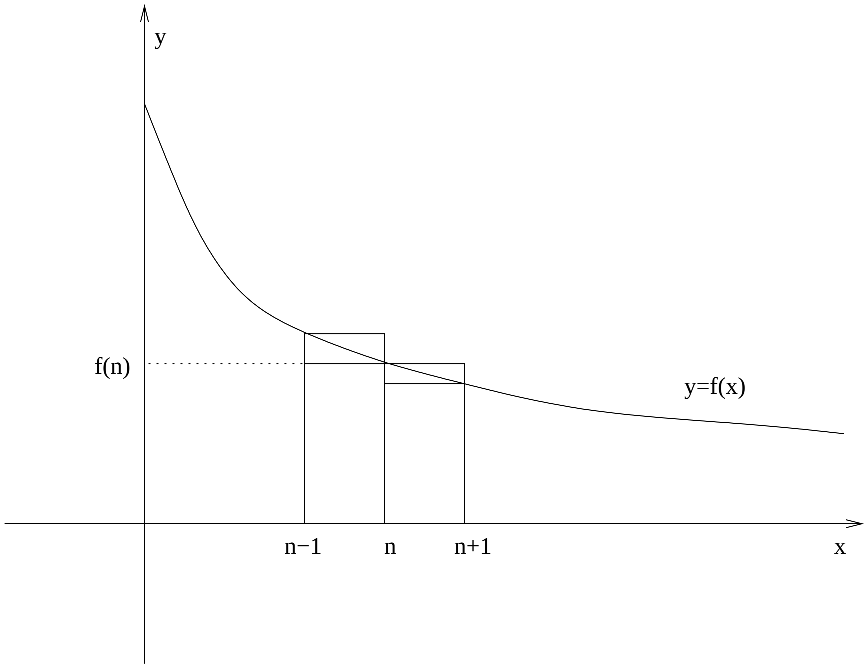

Figure 1 – **Comparaison entre une série et une intégrale**

d'où en sommant $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} f(n) \leqslant \int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{p-1} f(n)$, ce qui assure le résultat. ∎

Exemple : Etudions la convergence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

f définie par $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ est positive, décroissante sur $[0, +\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et est de même nature que la série étudiée.
Ceci prouve que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$ converge.

3.5. Règle de Riemann

Théorème : $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Ce sont les séries de Riemann.
Démonstration : On compare cette série avec $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et le résultat est immédiat. ■

Ceci nous donne la règle de Riemann.

Théorème : $\alpha \in \mathbb{R}, u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{k}{n^\alpha}$, alors : $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Démonstration : Il suffit d'utiliser le critère d'équivalence et le théorème précédent. ■

3.6. Règle de d'Alembert

Théorème : $\sum u_n$ une série à termes positifs non nuls (à partir d'un certain rang) telle que : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$

- si $l > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement,
- si $l < 1$, $\sum u_n$ converge,
- et si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

> Ce théorème est séduisant à priori, mais on tombe très souvent sur le cas douteux. Il s'utilise souvent dans le cadre des séries entières qu'on étudiera dans quelques chapitres.
> Avec les séries numériques, il s'utilise principalement quand on se trouve en présence de factorielles ou de termes de nature géométrique du type : a^n.

Démonstration : Pour $l > 1$, la suite positive (u_n) croit et ne tend donc pas vers 0. On a bien la divergence grossière.
Pour $l < 1$, à partir d'un certain rang N $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1+l}{2}$.
et donc par récurrence très facile, pour $n \geqslant N$, $u_n \leqslant \left(\dfrac{1+l}{2}\right)^{n-N} u_N = \left(\dfrac{1+l}{2}\right)^n \dfrac{u_N}{\left(\dfrac{1+l}{2}\right)^N}$.

Cette dernière série est géométrique, le théorème de comparaison entre séries positives fournit le résultat. ■

Exemple : Etudions la convergence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$.
C'est une série à termes **strictement** positifs, on va pouvoir utiliser le critère de d'Alembert.

$$\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)\,n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \underset{+\infty}{\to} \frac{1}{e} < 1$$

Ceci prouve que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge.

4. Séries Absolument Convergentes

4.1. Convergence absolue d'une série numérique

Définition : Une série $\sum u_n$ est **absolument convergente** $\Leftrightarrow \sum |u_n|$ est convergente.
Une série convergente mais non absolument convergente est dite **semi-convergente**.

4.2. Convergence des séries absolument convergentes

Théorème : Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration : Comme $|\mathrm{Re}\, u_n| \leqslant |u_n|$ et $|\mathrm{Im}\, u_n| \leqslant |u_n|$, il suffit par linéarité de le montrer pour les séries à valeur réelle.
Pour celles-ci, on pose $u_n^+ = \max(u_n,0)$ et $u_n^- = \max(-u_n,0)$.
Les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont positives et $u_n^+ \leqslant |u_n|$, $u_n^- \leqslant |u_n|$ prouvent par comparaison que ces séries convergent.
Comme $u_n = u_n^+ - u_n^-$, on a bien $\sum u_n$ converge. ■

Attention, ceci n'est pas une équivalence, on verra qu'il existe des séries semi-convergentes. L'exemple le plus classique est $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

4.3. Un moyen classique de montrer une convergence absolue de série

Ceci n'est pas un théorème mais un procédé usuel qu'il faut justifier à chaque fois.
Si il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors $|u_n| = o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$, comme $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge, par comparaison, $\sum u_n$ converge absolument.

5. Séries Numériques Réelles Alternées

5.1. Séries alternées

Définition : La série $\sum u_n$ est **alternée** $\Leftrightarrow \sum (-1)^n u_n$ est une série de signe constant.
On parle aussi de série alternée à partir d'un certain rang.

Il s'agit donc de séries à valeur réelle.

Exemple : $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée, mais pas $\sum \cos n$.

5.2. Critère spécial des séries alternées

Théorème : $\sum u_n$ une série alternée telle que la suite $(|u_n|)$ est décroissante tendant vers 0 à l'infini.
- Alors, $\sum u_n$ est convergente de somme s et $s \in [s_n, s_{n+1}]$ (ou $[s_{n+1}, s_n]$).
- De plus, avec $r_n = s - s_n$, on a $|r_n| \leqslant |u_{n+1}|$, et r_n est du signe de u_{n+1}.

On dit que la somme de la série est encadrée par 2 termes consécutifs et que le reste de la série est, en valeur absolue, majorée par son premier terme.

Ce théorème est illustré par la figure 2, page suivante.
Démonstration : On va faire la démonstration quand u_n est du signe de $(-1)^n$.

$$s_{2n+2} - s_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leqslant 0$$

d'où (s_{2n}) est décroissante.

$$s_{2n+3} - s_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}| \geqslant 0$$

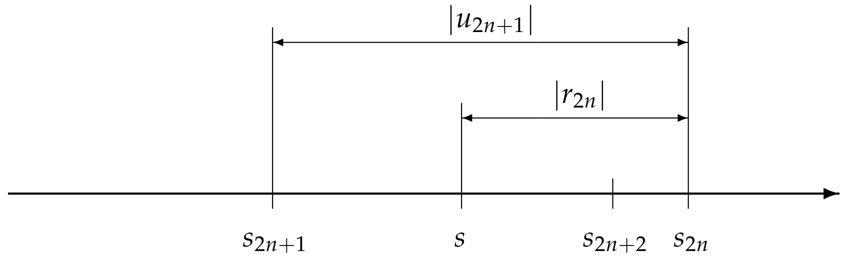

Figure 2 – **Convergence d'une série répondant au critère special**

d'où (s_{2n+1}) est croissante.
D'autre part, $s_{2n+1} \leqslant s_{2n} \leqslant s_0 = u_0$. (s_{2n+1}) est croissante majorée, donc convergente.
De même, $s_{2n} \geqslant s_{2n+1} \geqslant s_1$. (s_{2n}) est décroissante minorée, donc convergente.
Comme $s_{2n+1} - s_{2n} = u_{2n+1}$ tend vers 0, ces deux suites sont adjacentes et convergent vers la même limite s.
D'où, par monotonie $s_{2n+1} \leqslant s \leqslant s_{2n}$ et $s_{2n+1} \leqslant s \leqslant s_{2n+2}$. C'est à dire : $|r_n| \leqslant |u_{n+1}|$ que n soit pair ou impair.
■

Exemple : $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée clairement convergente par application du critère spécial des séries alternés.

Il faut bien vérifier qu'on applique **scrupuleusement** le critère spécial.

> Le critère spécial des séries alternées **ne s'applique pas** à des équivalents.
> On écrit parfois $u_n = v_n + w_n$ avec $\sum v_n$ alternée répondant au critère spécial des séries alternées et $\sum w_n$ absolument convergente.

Exemple : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$ est une série alternée telle que $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ avec $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui converge par application simple du critère spécial des séries alternées.
Cependant $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$ diverge.
En effet,

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1 - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \underbrace{\underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\text{t.g. série convergente}} + \underbrace{\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{\text{t.g. série divergente}}}_{\text{terme général d'une série divergente}}$$

On a bien montré sur un exemple que le critère d'équivalence ne s'applique pas aux séries alternées...

6. Compléments

6.1. Avec Maple

C'est le mot-clef « `sum` » qui permet de calculer une somme de série.

`> sum(1/(n**2),n=1..infinity);` calcule $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ qui vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Maple connait la somme de nombreuses séries connues. Mais, il lui arrive de ne pas savoir déterminer la nature d'une série...

6.2. Les mathématiciens du chapitre

Bernoulli Jacob 1654-1705 Mathématicien suisse de la grande famille des Bernoulli. On lui doit des travaux sur les courbes, les coordonnées polaires, le calcul intégral, les séries numériques... C'est lui qui a montré la convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$...

Euler Léonard 1707-1783 L'apport de ce mathématicien suisse est plus que considérable. La définition précise de fonction, l'exponentielle complexe, les équations différentielles linéaires, les courbes paramétrées, les quadriques et, entre autres, de nombreux résultats sur les séries numériques...