Sommaire

Dans tout le chapitre, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base.

1. Déterminant de n vecteurs dans une base $\mathscr{B}$

1.1. Forme n-linéaire alternée sur E

Définition : E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, $f : \begin{cases} \mathrm{E}^n & \to & \mathbb{K} \\ (u_1, u_2, \dots, u_n) & \longmapsto & f(u_1, u_2, \dots, u_n) \end{cases}$

On dit que f est n-linéaire alternée

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(u_1, u_2, \dots, \lambda.u_i + \mu.u_i', \dots, u_n) & = & \lambda.f(u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_n) + \mu.f(u_1, u_2, \dots, u_i', \dots, u_n) \\ f(u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n) & = & -f(u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n) \end{cases}$$

pour tous les vecteurs $u_1, \dots, u_n$, tous les scalaires λ, μ et pour $i \neq j$

C'est à dire qu'elle est linéaire par rapport à chacune des variables et que l'échange de 2 variables la transforme en son opposé.

> Ainsi, quand on a 2 fois le même vecteur, la forme est égale à son opposée et donc nulle...

1.2. Déterminant de n vecteurs dans une base $\mathscr{B}$

Théorème : Si f est n-linéaire alternée et si $f(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$, alors f est complètement définie.

Démonstration : Il suffit en effet de développer par n-linéarité et d'utiliser le caractère alterné pour remettre les vecteurs dans le « bon » ordre. Le résultat s'exprime donc en fonction de $f(e_1, e_2, \dots, e_n)$ car les autres termes sont nuls. Le coefficient ne dépend que des règles de calcul et non pas de f. On a donc le résultat dès qu'on fixe la valeur de $f(e_1, e_2, \dots, e_n)$. ■

Définition : Le déterminant de $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ dans $\mathscr{B}$ est $f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ où f est la forme n-linéaire alternée vérifiant $f(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$. On le note $\det(u_1, u_2, \dots, u_n)_{\mathscr{B}}$

1.3. Propriétés élémentaires

Théorème : Échanger 2 vecteurs multiplie le déterminant par -1.

Théorème : Si on a deux fois le même vecteur dans un déterminant, celui-ci est nul.

Théorème : Si un vecteur est combinaison linéaire des autres vecteurs, le déterminant est nul.

Démonstration : En développant par linéarité par rapport à ce vecteur, on n'obtient que des déterminants qui contiennent 2 fois le même vecteur, et sont donc nuls. ■

Théorème : Ajouter à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs ne change pas le déterminant.

Démonstration : Ceci est une conséquence immédiate du théorème précédent. ■

Théorème : Multiplier **un seul** des vecteurs par λ multiplie le déterminant par λ.

1.4. Déterminant dans une base $\mathscr{B}' = \left(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\right)$

Théorème : 2 formes n-linéaires alternées sont proportionnelles.

Démonstration : Les règles de calcul qui permettent de tout exprimer en fonction de $f(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ restent les mêmes que l'on travaille avec la forme n-linéaire alternée f ou g.
Ainsi, on a : $f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \mathrm{K}\, f(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et : $g(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \mathrm{K}\, g(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
K est le même dans les deux cas, il ne dépend que de $u_1, u_2, \ldots, u_n$, pas de f ou g.
On a donc bien un λ tel que : $g(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \lambda\, f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ pour tous les $u_1, u_2, \ldots, u_n$. ■

Or les déterminants dans différentes bases sont des formes n-linéaires alternées et sont donc proportionnels.
Ceci nous donne : $\det(u_1, u_2, \ldots, u_n)_{\mathscr{B}'} = \lambda \times \det(u_1, u_2, \ldots, u_n)_{\mathscr{B}}$ pour tout $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.
Et enfin : $\left\{ \begin{array}{rcl} \det(u_1, u_2, \ldots, u_n)_{\mathscr{B}'} & = & \det(u_1, u_2, \ldots, u_n)_{\mathscr{B}} \times \det(e_1, e_2, \ldots, e_n)_{\mathscr{B}'} \\ \det(u_1, u_2, \ldots, u_n)_{\mathscr{B}} & = & \det(u_1, u_2, \ldots, u_n)_{\mathscr{B}'} \times \det(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)_{\mathscr{B}} \end{array} \right.$
Ce sont les formules de changement de base des déterminants de vecteurs.
Pour la première relation, on calcule λ en remplaçant $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ par $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
Pour l'autre, on échange simplement les rôles de $\mathscr{B}$ et de $\mathscr{B}'$.

> Si on applique ce dernier résultat à $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$,
> on obtient : $1 = \det(e_1, e_2, \ldots, e_n)_{\mathscr{B}'} \times \det(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)_{\mathscr{B}}$
> Ce qui prouve qu'un déterminant d'une base dans une autre est non nul.

1.5. Caractérisation des bases

Théorème : $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une base de E $\Leftrightarrow \det(u_1, u_2, \ldots, u_n)_{\mathscr{B}} \neq 0$

Démonstration : Si la famille est liée, le déterminant est clairement nul.
Si la famille est libre, $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une base qu'on note $\mathscr{B}'$,
d'où : $\det(u_1, u_2, \ldots, u_n)_{\mathscr{B}'} = \det(u_1, u_2, \ldots, u_n)_{\mathscr{B}} \times \det(e_1, e_2, \ldots, e_n)_{\mathscr{B}'} = 1$.
Ce qui entraîne $\det(u_1, u_2, \ldots, u_n)_{\mathscr{B}} \neq 0$, comme on vient de le voir. ■

2. Déterminant d'un endomorphisme

2.1. Déterminant d'un endomorphisme dans une base $\mathscr{B}$

Définition : $\varphi : E \to E$ un endomorphisme et $\mathscr{B}$ une base de E,

$$\det(\varphi)_{\mathscr{B}} = \det(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n))_{\mathscr{B}}$$

2.2. Déterminant d'un endomorphisme

Théorème : Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont 2 bases de E,

$$\det(\varphi)_{\mathscr{B}} = \det(\varphi)_{\mathscr{B}'}$$

Démonstration : Comme φ est linéaire, l'application $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \mapsto \det(\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n))_{\mathscr{B}}$ est une forme n-linéaire alternée !
C'est donc un déterminant. Ainsi, comme deux déterminants sont proportionnels :

$$\det(\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n))_{\mathscr{B}} = \lambda \times \det(u_1, u_2, \ldots, u_n)_{\mathscr{B}}$$

et de plus, en remplaçant les u_i par e_i : $\lambda = \det(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n))_{\mathscr{B}} = \det(\varphi)_{\mathscr{B}}$

Ce qui donne : $\begin{cases} \det(\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n))_{\mathscr{B}} & = \det(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n))_{\mathscr{B}} \times \det(u_1, u_2, \ldots, u_n)_{\mathscr{B}} \\ \det(\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n))_{\mathscr{B}} & = \det(\varphi)_{\mathscr{B}} \times \det(u_1, u_2, \ldots, u_n)_{\mathscr{B}} \end{cases}$

De même, dans la base $\mathscr{B}'$: $\det(\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n))_{\mathscr{B}'} = \det(\varphi)_{\mathscr{B}'} \times \det(u_1, u_2, \ldots, u_n)_{\mathscr{B}'}$.
Propriété qu'on applique aux vecteurs e_i d'où le premier résultat :

$$\det(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n))_{\mathscr{B}'} = \det(\varphi)_{\mathscr{B}'} \times \det(e_1, e_2, \ldots, e_n)_{\mathscr{B}'}$$

On utilise maintenant la propriété générale de changement de base avec les vecteurs $\varphi(e_i)$, ce qui donne le second résultat :

$$\det(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n))_{\mathscr{B}'} = \det(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n))_{\mathscr{B}} \times \det(e_1, e_2, \ldots, e_n)_{\mathscr{B}'}$$
$$\det(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n))_{\mathscr{B}'} = \det(\varphi)_{\mathscr{B}} \times \det(e_1, e_2, \ldots, e_n)_{\mathscr{B}'}$$

On égale et on simplifie par $\det(e_1, e_2, \ldots, e_n)_{\mathscr{B}'}$ dont on a montré qu'il est bien non nul, ce qui nous permet de conclure :

$$\det(\varphi)_{\mathscr{B}} = \det(\varphi)_{\mathscr{B}'}$$

■

Conclusion : On peut parler du déterminant d'un endomorphisme puisqu'il ne dépend pas de la base choisie. On a donc le libre choix de la base pour calculer ce déterminant.

2.3. Caractérisation des automorphismes

Théorème : Soit φ un endomorphisme de E,

$$\varphi \text{ est un automorphisme} \Leftrightarrow \det(\varphi) \neq 0$$

Démonstration : On sait que φ est un automorphisme $\Leftrightarrow (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n))$ est une base.
Ce qui équivaut à : $\det(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n))_{\mathscr{B}} \neq 0$, c'est à dire $\det(\varphi) \neq 0$ ■

2.4. Déterminant de la composée de 2 endomorphismes

Théorème : φ et ψ deux endomorphismes de E, alors

$$\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi) \times \det(\psi)$$

Démonstration : La propriété est immédiate quand ψ n'est pas inversible car alors $\varphi \circ \psi$ ne l'est pas non plus et les deux termes sont nuls.
Si ψ est inversible, on note $\mathscr{B}' = \left(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\right) = (\psi(e_1), \psi(e_2), \ldots, \psi(e_n))$. Alors

$$\begin{aligned}
\det(\varphi \circ \psi) &= \det(\varphi(e'_1), \varphi(e'_2), \ldots, \varphi(e'_n))_{\mathscr{B}} \\
&= \det(\varphi(e'_1), \varphi(e'_2), \ldots, \varphi(e'_n))_{\mathscr{B}'} \times \det(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)_{\mathscr{B}} \\
&= \det(\varphi) \times \det(\psi(e_1), \psi(e_2), \ldots, \psi(e_n))_{\mathscr{B}} \\
&= \det(\varphi) \times \det(\psi)
\end{aligned}$$

■

3. Déterminant d'une matrice carrée

3.1. Déterminant d'une matrice carrée A dans une base

Une matrice carrée $n \times n$ s'interprète comme la matrice d'un endomorphisme φ de E dans la base $\mathscr{B}$. On pose donc :

Définition : $\det(A)_{\mathscr{B}} = \det(\varphi)$

3.2. Déterminant d'un produit de 2 matrices, de la matrice inverse d'une matrice inversible

Théorème : $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

$$\det(A \times B)_{\mathscr{B}} = \det(A)_{\mathscr{B}} \times \det(B)_{\mathscr{B}}$$

Démonstration : $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\varphi)$, $B = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\psi)$, alors :

$$\begin{aligned}
A \times B &= \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\varphi \circ \psi) \\
\det(\varphi \circ \psi) &= \det(\varphi) \times \det(\psi) \\
\det(A \times B)_{\mathscr{B}} &= \det(A)_{\mathscr{B}} \times \det(B)_{\mathscr{B}}
\end{aligned}$$

■

Théorème : $A \in GL_n(\mathbb{K})$

$$\det\left(A^{-1}\right)_{\mathscr{B}} = \frac{1}{\det(A)_{\mathscr{B}}}$$

Démonstration : $A \times A^{-1} = I_n$, $\det(I_n)_{\mathscr{B}} = \det(Id_E) = \det(e_1, e_2, \ldots, e_n)_{\mathscr{B}} = 1$,
d'où : $\det(A)_{\mathscr{B}} \times \det\left(A^{-1}\right)_{\mathscr{B}} = 1$ ■

3.3. Déterminant de 2 matrices semblables

> On rappelle que deux matrices sont semblables si et seulement si :
> - elles sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes, ou bien,
> - il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$

Théorème : A et B, 2 matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors : $\det(A)_{\mathcal{B}} = \det(B)_{\mathcal{B}}$

Démonstration : On a $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$, d'où :

$$\begin{aligned}
\det(B)_{\mathcal{B}} &= \det\left(P^{-1}\right)_{\mathcal{B}} \times \det(A)_{\mathcal{B}} \times \det(P)_{\mathcal{B}} \\
&= \det\left(P^{-1}\right)_{\mathcal{B}} \times \det(P)_{\mathcal{B}} \times \det(A)_{\mathcal{B}} \\
&= \det\left(P^{-1} \times P\right)_{\mathcal{B}} \times \det(A)_{\mathcal{B}} \\
&= \det(A)_{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

■

3.4. Déterminant d'une matrice carrée A

Le problème est de montrer que le calcul du déterminant d'une matrice ne dépend pas de la base choisie.
C'est à dire que : $\det(A)_{\mathcal{B}} = \det(A)_{\mathcal{B}'}$.
Soit : $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\psi)$
Soit aussi : $A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$ et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
On a alors : $A' = P^{-1}AP$, et donc : $\det(A')_{\mathcal{B}'} = \det(A)_{\mathcal{B}'}$ en appliquant la propriété déjà montrée à la nouvelle base.
Enfin : $\det(A')_{\mathcal{B}'} = \det(\varphi) = \det(A)_{\mathcal{B}'} = \det(\psi)$.
Mais on a aussi : $\det(A)_{\mathcal{B}} = \det(\varphi) = \det(A)_{\mathcal{B}'}$. Ce qui achève la démonstration.
La notion de déterminant d'une matrice carrée a maintenant bien un sens.

3.5. Déterminant de la transposée d'une matrice

Théorème : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$\det\left({}^tA\right) = \det(A)$$

La démonstration est ici admise.

4. Calcul de déterminants

4.1. En dimension 2 et 3

On va d'abord retrouver un résultat bien connu :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} &= \det(u_1, u_2) = \det(a.e_1 + b.e_2, c.e_1 + d.e_2)_{\mathcal{B}} \\
&= ac\det(e_1, e_1)_{\mathcal{B}} + ad\det(e_1, e_2)_{\mathcal{B}} + bc\det(e_2, e_1)_{\mathcal{B}} + bd\det(e_2, e_2)_{\mathcal{B}} \\
&= 0 + ad - bc + 0 = ad - bc
\end{aligned}$$

En dimension 3, on peut utiliser la règle de Sarrus, qui se montre de la même façon, en n'oubliant pas qu'elle n'est **absolument pas généralisable** à un ordre autre que 3...

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd$$

4.2. Déterminant d'une matrice triangulaire.

Théorème : $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & \cdots & y \\ 0 & a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & z \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_{n-1} \times a_n$

Démonstration : On factorise par a_1, et, en enlevant le bon nombre de fois le premier vecteur aux autres, on amène des 0 sur la première ligne et on obtient :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & \cdots & y \\ 0 & a_2 & s & & t \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & u \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 \times \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & \cdots & y \\ 0 & a_2 & s & & t \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & u \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & s & & t \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & u \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

On recommence ensuite avec a_2. On obtient ainsi de suite par une récurrence admise :

$$\Delta = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_{n-1} \times a_n \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_{n-1} \times a_n$$

■

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

La règle des signes est : $\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots & \cdots & \cdots & (-1)^{n+1} \\ - & + & - & & & & \\ + & - & + & & (-1)^{i+j} & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & & + & - \\ (-1)^{n+1} & & & & & - & + \end{vmatrix}$

> On remarque qu'on a $(-1)^{i+j}$ en $i^{ème}$ ligne et $j^{ème}$ colonne.

On développe suivant une ligne ou une colonne en tenant compte de la règle de signes $(-1)^{i+j} a_{ij}\,\Delta_{ij}$ où a_{ij} est le coefficient de la matrice et Δ_{ij} est le déterminant obtenu en enlevant la ligne i et la colonne j correspondante. On admet ce résultat.

Théorème : On peut développer selon la $j^{\text{ème}}$ colonne :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\,\Delta_{ij}$$

ou développer selon la $i^{\text{ème}}$ ligne :

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\,\Delta_{ij}$$

> Il est important de noter qu'on peut **choisir** sa ligne ou sa colonne.

> Un déterminant est donc un **polynôme** des coefficients de la matrice...

Corollaire : En utilisant les notations précédentes, M, une matrice inversible, alors :

$$\mathrm{M}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \times \text{transposée de} \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & (-1)^{i+j}\,\Delta_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

Démonstration : Le calcul de $\mathrm{M} \times$ transposée de $\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & (-1)^{i+j}\,\Delta_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$ donne Δ pour les termes de la diagonale et 0 pour les autres puisque cela revient à développer un déterminant qui a 2 colonnes identiques. ■

4.4. Opérations sur les lignes et les colonnes d'un déterminant.

- inverser deux lignes ou deux colonnes multiplie le déterminant par -1
- ajouter à une ligne (ou une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (ou colonnes) ne change pas le déterminant.

4.5. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Théorème : $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $\mathrm{C} \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$, $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, O est la matrice nulle de $\mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $p+q=n$. Alors,

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{O} & \mathrm{C} \end{vmatrix} = \det(\mathrm{A}) \times \det(\mathrm{C})$$

On admet ce résultat.

> Cette propriété **ne se généralise pas** au déterminant d'une matrice définie par blocs et non triangulaire par blocs.

Exemple : On va calculer le déterminant : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \pi & \ln 2 & 17 \\ 3 & 4 & e & \ln 7 & -23 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \pi^2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

Ce déterminant est celui d'une matrice triangulaire par blocs, dont on fait ressortir ici la structure :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \pi & \ln 2 \\ e & \ln 7 \end{matrix} & \begin{matrix} 17 \\ -23 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \pi^2 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & (-3) \end{pmatrix}.$$

On a donc, en appliquant deux fois le théorème précédent :

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \times |-3| = (-2) \times 2 \times (-3) = 12$. Attention, ce ne sont pas des valeurs absolues...

4.6. Exemples

On notera les déterminants avec un indice qui correspond à leur rang, qui est toujours plus grand que 1.

a/ Utilisation d'une formule de récurrence

Soit le déterminant $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}_n$ qu'on développe selon la $1^{\text{ère}}$ colonne $1^{\text{ère}}$

$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1} = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$ en développant ce déterminant selon la $1^{\text{ère}}$ ligne.

On obtient ainsi la relation de récurrence $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$ qu'on résout en calculant Δ_1 et Δ_2.

b/ Manipulation de lignes ou colonnes

Soit le déterminant $\Delta_n = |\text{abs}\,(i-j)|_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}_n$ avec $n \geqslant 3$.

A chaque ligne, de la dernière à la seconde, on enlève la précédente. Ces opérations sont faites successivement... Il faut bien vérifier qu'on peut les faire successivement et qu'on n'utilise pas une ligne ou une colonne qui a été modifiée... et qui donc n'existe plus !

On obtient donc : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}_n$

A chaque ligne, de la dernière à la troisième, on enlève la précédente. Ces opérations sont faites successivement...

On obtient donc, en développant successivement selon la première et la dernière colonne :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}_n = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & \cdots & n-1 \\ 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}_{n-1} = -(-1)^n (n-1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \end{vmatrix}_{n-2}$$

Enfin, $\Delta_n = (-1)^{n+1} (n-1)\, 2^{n-2}$

5. Compléments

5.1. Produit de matrices définies par blocs

Il ne s'agit pas ici à proprement parler de calculs de déterminants...
Si deux matrices sont définies par blocs, on peut parfois effectuer leur produit en travaillant par blocs.
C'est à dire :

$$\begin{pmatrix} (A) & (B) \\ (C) & (D) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (A') & (B') \\ (C') & (D') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A)\times(A')+(B)\times(C') & (A)\times(B')+(B)\times(D') \\ (C)\times(A')+(D)\times(C') & (C)\times(B')+(D)\times(D') \end{pmatrix}$$

> Les dimensions des matrices doivent être compatibles, à savoir :
> - Le nombre de **colonnes** de A et C doit être le nombre de **lignes** de A′ et B′.
> - Le nombre de **colonnes** de B et D doit être le nombre de **lignes** de C′ et D′.
>
> D'autre part, rappelons que le produit de matrices n'est pas commutatif, l'ordre dans lequel on écrit ces produits est donc fondamental...

5.2. Colbert, lycée numérique

a/ Maple

Comme pour tout l'algèbre linéaire, il faut d'abord charger le pack `linalg` :
`> with(linalg) ;`
Ensuite, c'est simplement l'instruction `det` qui calcule un déterminant :
`> det(A) ;`
`> inverse(A) ;` inverse une matrice inversible.
`> transpose(A) ;` transpose une matrice, et
`> rank(A) ;` donne son rang. Pour ces 3 instructions, on se méfiera quand la matrice dépend d'un paramètre. Dans ce cas, la réponse fournie correspond en général au cas général.
On rappelle `vector` et `matrix` pour créer un vecteur ou une matrice, on rappelle que le produit des matrices est « `&*` » car Maple considère à priori tous les produits comme commutatifs.

Enfin, l'instruction `evalm` est souvent nécessaire pour avoir le contenu effectif d'une matrice à l'écran.

b/ HP 40G-40GS

On crée une matrice ou un vecteur en utilisant `MATRIX`, L8C2, puis `F1` ou `F2`, marquées ici `EDIT` et `NEW`. Dans ce dernier cas, il faut choisir si c'est une matrice ou un vecteur.
Les commandes de matrices sont dans le menu `MATH`, L4C2, choisir `Matrix`.
Malheureusement, cette calculatrice n'admet que des matrices à coefficients numériques.
On trouve `DET` pour le déterminant, `-1` pour l'inverse, mais la touche inverse (L6C5) convient aussi, `TRN` pour la transposée, ou la transconjuguée, et `RANK` pour le rang.
On a aussi `CROSS` pour le produit vectoriel et `DOT` pour le produit scalaire de 2 vecteurs.
Enfin, on trouve `IDENMAT` pour générer la matrice identité.

c/ HP 50G

On crée une matrice ou un vecteur en utilisant `MTRW`, L4C3, puis `F1`, marquée ici `EDIT` et `F2` qui permet d'indiquer. si c'est une matrice ou un vecteur.
Les commandes de matrices sont dans le menu `MATRICES`, L8C3.
Dans le sous-menu `OPERATIONS`, on trouve `DET` pour le déterminant, `.RANK` pour le rang, `.TRAN` pour la transposée, ou la transconjuguée, et `ABS` pour la norme d'une matrice ou d'un vecteur.
On trouve aussi des commandes de matrices dans le menu `MTH`, L4C4, choisir `MATRIX`.
La touche inverse (L6C4) convient pour l'inverse.
On a `CROSS` pour le produit vectoriel et `DOT` pour le produit scalaire de 2 vecteurs dans le sous-menu `VECTOR` du menu `MATRICES`, L4C2.
Enfin, on a `IDN` pour la matrice identité dans le sous-menu `CREATE` du menu `MATRICES`, L4C2.

d/ TI 89

On crée une matrice ou un vecteur dans l'éditeur de matrices, menu `APPS`, puis `DATA-MATRIX EDITOR`, puis `NEW`,
Vous devez alors sélectionner le type `MATRIX`, lui donner un nom et donner ses dimensions. Enfin, vous entrez les éléments de la matrice.
On trouve dans le menu `MATH`, L8C3, puis `MATRIX`, la commande `det` pour le déterminant et les commandes `dotP` et `crossP` pour les produits scalaires et vectoriels de 2 vecteurs.
Toujours dans ce même sous-menu, la transposée, ou la transconjuguée, s'obtient avec la commande `T`, qui se place comme un exposant M^{T}.

e/ TI N-inspire CAS

On crée une matrice en ouvrant le modèle corespondant dans la boîte de modèles. Il faut en donner les dimensions.
La commande `det` calcule le déterminant et les commandes `dotP` et `crossP` calculent les produits scalaires et vectoriels de 2 vecteurs.
La transposée, ou la transconjuguée, s'obtient avec la commande `T`, qui se place comme un exposant. On l'obtient directement au clavier par `@T`.

f/ ClassPad 300

Il faut utiliser le clavier `2D` pour créer une matrice, ajouter des colonnes et des lignes pour la remplir.
Les calculs matriciels sont dans le menu `Action`, sous-menu `Matrix-Create`, on y trouve `trn` pour la transposée, `ident` pour la matrice identité.
Dans le sous menu `Matrix-Calculation`, on trouve `det` pour le déterminant.

Dans le sous-menu `Vector`, les commandes `crossP`, `dotP` et `norm` donnent le produit vectoriel, scalaire et la norme.

5.3. Les mathématiciens du chapitre

Vandermonde Alexandre 1735-1796 Mathématicien français, il est le premier à étudier les déterminants pour eux-mêmes.

Laplace Pierre 1749-1827 Mathématicien, physicien et astronome, fils de fermier normand, il généralisera, entre autres, les règles de calcul des déterminants données par Vandermonde.