Sommaire

Dans tout le chapitre, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et $\mathscr{B} = (e_1,e_2,\ldots,e_n)$ est une base.

1. Déterminant de n vecteurs dans une base $\mathscr{B}$

1.1. Forme n-linéaire alternée sur E

Définition : E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, $f : \left\{\begin{array}{rcl} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (u_1,u_2,\ldots,u_n) & \longmapsto & f(u_1,u_2,\ldots,u_n)\end{array}\right.$

On dit que f est n-linéaire alternée

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} f(u_1,u_2,\ldots,\lambda.u_i+\mu.u_i',\ldots,u_n) & = & \lambda.f(u_1,u_2,\ldots,u_i,\ldots,u_n)+\mu.f(u_1,u_2,\ldots,u_i',\ldots,u_n) \\ f(u_1,u_2,\ldots,u_i,\ldots,u_j,\ldots,u_n) & = & -f(u_1,u_2,\ldots,u_j,\ldots,u_i,\ldots,u_n)\end{array}\right.$$

pour tous les vecteurs $u_1,\ldots,u_n$, tous les scalaires λ,μ et pour $i \neq j$

C'est à dire qu'elle est linéaire par rapport à chacune des variables et que l'échange de 2 variables la transforme en son opposé.

> Ainsi, quand on a 2 fois le même vecteur, la forme est égale à son opposée et donc nulle...

1.2. Déterminant de n vecteurs dans une base $\mathscr{B}$

Théorème : Si f est n-linéaire alternée et si $f(e_1,e_2,\ldots,e_n) = 1$, alors f est complètement définie.

Démonstration : Il suffit en effet de développer par n-linéarité et d'utiliser le caractère alterné pour remettre les vecteurs dans le « bon » ordre. Le résultat s'exprime donc en fonction de $f(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ car les autres termes sont nuls. Le coefficient ne dépend que des règles de calcul et non pas de f. On a donc le résultat dès qu'on fixe la valeur de $f(e_1,e_2,\ldots,e_n)$. ∎

Définition : Le déterminant de $(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ dans $\mathscr{B}$ est $f(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ où f est la forme n-linéaire alternée vérifiant $f(e_1,e_2,\ldots,e_n) = 1$. On le note $\det(u_1,u_2,\ldots,u_n)_{\mathscr{B}}$

1.3. Propriétés élémentaires

Théorème : Echanger 2 vecteurs multiplie le déterminant par -1.

Théorème : Si on a deux fois le même vecteur dans un déterminant, celui-ci est nul.

Théorème : Si un vecteur est combinaison linéaire des autres vecteurs, le déterminant est nul.

Démonstration : En développant par linéarité par rapport à ce vecteur, on n'obtient que des déterminants qui contiennent 2 fois le même vecteur, et sont donc nuls. ■

Théorème : Ajouter à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs ne change pas le déterminant.

Démonstration : Ceci est une conséquence immédiate du théorème précédent. ■

Théorème : Multiplier **un seul** des vecteurs par λ multiplie le déterminant par λ.

1.4. Déterminant dans une base $\mathscr{B}' = (e'_1,e'_2,\ldots,e'_n)$

Théorème : 2 formes n-linéaires alternées sont proportionelles.

Démonstration : Les règles de calcul qui permettent de tout exprimer en fonction de $f(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ restent les mêmes que l'on travaille avec la forme n-linéaire alternée f ou g.
Ainsi, on a : $f(u_1,u_2,\ldots,u_n) = K\,f(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ et : $g(u_1,u_2,\ldots,u_n) = K\,g(e_1,e_2,\ldots,e_n)$.
K est le même dans les deux cas, il ne dépend que de $u_1,u_2,\ldots,u_n$, pas de f ou g.
On a donc bien un λ tel que : $g(u_1,u_2,\ldots,u_n) = \lambda\,f(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ pour tous les $u_1,u_2,\ldots,u_n$. ■

Or les déterminants dans différentes bases sont des formes n-linéaires alternées et sont donc proportionels.
Ceci nous donne : $\det(u_1,u_2,\ldots,u_n)_{\mathscr{B}'} = \lambda \times \det(u_1,u_2,\ldots,u_n)_{\mathscr{B}}$ pour tout $(u_1,u_2,\ldots,u_n)$.
Et enfin : $\begin{cases} \det(u_1,u_2,\ldots,u_n)_{\mathscr{B}'} = \det(u_1,u_2,\ldots,u_n)_{\mathscr{B}} \times \det(e_1,e_2,\ldots,e_n)_{\mathscr{B}'} \\ \det(u_1,u_2,\ldots,u_n)_{\mathscr{B}} = \det(u_1,u_2,\ldots,u_n)_{\mathscr{B}'} \times \det(e'_1,e'_2,\ldots,e'_n)_{\mathscr{B}} \end{cases}$
Ce sont les formules de changement de base des déterminants de vecteurs.
Pour la première relation, on calcule λ en remplaçant $(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ par $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$.
Pour l'autre, on échange simplement les rôles de $\mathscr{B}$ et de $\mathscr{B}'$.

> Si on applique ce dernier résultat à $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$,
> on obtient : $1 = \det(e_1,e_2,\ldots,e_n)_{\mathscr{B}'} \times \det(e'_1,e'_2,\ldots,e'_n)_{\mathscr{B}}$
> Ce qui prouve qu'un déterminant d'une base dans une autre est non nul.

1.5. Caractérisation des bases

Théorème : $(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ est une base de $E \Leftrightarrow \det(u_1,u_2,\ldots,u_n)_{\mathscr{B}} \neq 0$

Démonstration : Si la famille est liée, le déterminant est clairement nul.
Si la famille est libre, $(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ est une base qu'on note $\mathscr{B}'$,
d'où : $\det(u_1,u_2,\ldots,u_n)_{\mathscr{B}'} = \det(u_1,u_2,\ldots,u_n)_{\mathscr{B}} \times \det(e_1,e_2,\ldots,e_n)_{\mathscr{B}'} = 1$.
Ce qui entraîne $\det(u_1,u_2,\ldots,u_n)_{\mathscr{B}} \neq 0$, comme on vient de le voir. ■

2. Déterminant d'un endomorphisme

2.1. Déterminant d'un endomorphisme dans une base $\mathscr{B}$

Définition : $\varphi : E \to E$ un endomorphisme et $\mathscr{B}$ une base de E,

$$\det(\varphi)_{\mathscr{B}} = \det(\varphi(e_1),\varphi(e_2),\ldots,\varphi(e_n))_{\mathscr{B}}$$

2.2. Déterminant d'un endomorphisme

Théorème : Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont 2 bases de E,

$$\det(\varphi)_{\mathscr{B}} = \det(\varphi)_{\mathscr{B}'}$$

Démonstration : Comme φ est linéaire, l'application $(u_1,u_2,\ldots,u_n) \mapsto \det(\varphi(u_1),\varphi(u_2),\ldots,\varphi(u_n))_{\mathscr{B}}$ est une forme n-linéaire alternée !
C'est donc un déterminant. Ainsi, comme deux déterminants sont proportionnels :

$$\det(\varphi(u_1),\varphi(u_2),\ldots,\varphi(u_n))_{\mathscr{B}} = \lambda \times \det(u_1,u_2,\ldots,u_n)_{\mathscr{B}}$$

et de plus, en remplaçant les u_i par e_i : $\lambda = \det(\varphi(e_1),\varphi(e_2),\ldots,\varphi(e_n))_{\mathscr{B}} = \det(\varphi)_{\mathscr{B}}$

Ce qui donne : $\begin{cases} \det(\varphi(u_1),\varphi(u_2),\ldots,\varphi(u_n))_{\mathscr{B}} & = \det(\varphi(e_1),\varphi(e_2),\ldots,\varphi(e_n))_{\mathscr{B}} \times \det(u_1,u_2,\ldots,u_n)_{\mathscr{B}} \\ \det(\varphi(u_1),\varphi(u_2),\ldots,\varphi(u_n))_{\mathscr{B}} & = \det(\varphi)_{\mathscr{B}} \times \det(u_1,u_2,\ldots,u_n)_{\mathscr{B}} \end{cases}$

De même, dans la base $\mathscr{B}'$: $\det(\varphi(u_1),\varphi(u_2),\ldots,\varphi(u_n))_{\mathscr{B}'} = \det(\varphi)_{\mathscr{B}'} \times \det(u_1,u_2,\ldots,u_n)_{\mathscr{B}'}$.
Propriété qu'on applique aux vecteurs e_i d'où le premier résultat :

$$\det(\varphi(e_1),\varphi(e_2),\ldots,\varphi(e_n))_{\mathscr{B}'} = \det(\varphi)_{\mathscr{B}'} \times \det(e_1,e_2,\ldots,e_n)_{\mathscr{B}'}$$

On utilise maintenant la propriété générale de changement de base avec les vecteurs $\varphi(e_i)$, ce qui donne le second résultat :

$$\det(\varphi(e_1),\varphi(e_2),\ldots,\varphi(e_n))_{\mathscr{B}'} = \det(\varphi(e_1),\varphi(e_2),\ldots,\varphi(e_n))_{\mathscr{B}} \times \det(e_1,e_2,\ldots,e_n)_{\mathscr{B}'}$$
$$\det(\varphi(e_1),\varphi(e_2),\ldots,\varphi(e_n))_{\mathscr{B}'} = \det(\varphi)_{\mathscr{B}} \times \det(e_1,e_2,\ldots,e_n)_{\mathscr{B}'}$$

On égale et on simplifie par $\det(e_1,e_2,\ldots,e_n)_{\mathscr{B}'}$ dont on a montré qu'il est bien non nul, ce qui nous permet de conclure :

$$\det(\varphi)_{\mathscr{B}} = \det(\varphi)_{\mathscr{B}'}$$

■

Conclusion : On peut parler du déterminant d'un endomorphisme puisqu'il ne dépend pas de la base choisie. On a donc le libre choix de la base pour calculer ce déterminant.

2.3. Caractérisation des automorphismes

Théorème : Soit φ un endomorphisme de E,

$$\varphi \text{ est un automorphisme} \Leftrightarrow \det(\varphi) \neq 0$$

Démonstration : On sait que φ est un automorphisme $\Leftrightarrow$ $(\varphi(e_1),\varphi(e_2),\ldots,\varphi(e_n))$ est une base.
Ce qui équivaut à : $\det(\varphi(e_1),\varphi(e_2),\ldots,\varphi(e_n))_{\mathscr{B}} \neq 0$, c'est à dire $\det(\varphi) \neq 0$ ■

2.4. Déterminant de la composée de 2 endomorphismes

Théorème : φ et ψ deux endomorphismes de E, alors

$$\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi) \times \det(\psi)$$

Démonstration : La propriété est immédiate quand ψ n'est pas inversible car alors $\varphi \circ \psi$ ne l'est pas non plus et les deux termes sont nuls.
Si ψ est inversible, on note $\mathscr{B}' = (e'_1,e'_2,\ldots,e'_n) = (\psi(e_1),\psi(e_2),\ldots,\psi(e_n))$. Alors

$$\begin{aligned} \det(\varphi \circ \psi) &= \det\left(\varphi(e'_1),\varphi(e'_2),\ldots,\varphi(e'_n)\right)_{\mathscr{B}} \\ &= \det\left(\varphi(e'_1),\varphi(e'_2),\ldots,\varphi(e'_n)\right)_{\mathscr{B}'} \times \det(e'_1,e'_2,\ldots,e'_n)_{\mathscr{B}} \\ &= \det(\varphi) \times \det(\psi(e_1),\psi(e_2),\ldots,\psi(e_n))_{\mathscr{B}} \\ &= \det(\varphi) \times \det(\psi) \end{aligned}$$

■

3. Déterminant d'une matrice carrée

3.1. Déterminant d'une matrice carrée A dans une base

Une matrice carrée $n \times n$ s'interprète comme la matrice d'un endomorphisme φ de E dans la base $\mathscr{B}$. On pose donc :

Définition : $\det(A)_{\mathscr{B}} = \det(\varphi)$

3.2. Déterminant d'un produit de 2 matrices, de la matrice inverse d'une matrice inversible

Théorème : $A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

$$\det(A \times B)_{\mathscr{B}} = \det(A)_{\mathscr{B}} \times \det(B)_{\mathscr{B}}$$

Démonstration : $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\varphi)$, $B = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\psi)$, alors :

$$\begin{aligned} A \times B &= \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\varphi \circ \psi) \\ \det(\varphi \circ \psi) &= \det(\varphi) \times \det(\psi) \\ \det(A \times B)_{\mathscr{B}} &= \det(A)_{\mathscr{B}} \times \det(B)_{\mathscr{B}} \end{aligned}$$

■

Théorème : $A \in GL_n(\mathbb{K})$

$$\det\left(A^{-1}\right)_{\mathscr{B}} = \frac{1}{\det(A)_{\mathscr{B}}}$$

Démonstration : $A \times A^{-1} = I_n$, $\det(I_n)_{\mathscr{B}} = \det(Id_E) = \det(e_1,e_2,\ldots,e_n)_{\mathscr{B}} = 1$,
d'où : $\det(A)_{\mathscr{B}} \times \det\left(A^{-1}\right)_{\mathscr{B}} = 1$ ■

3.3. Déterminant de 2 matrices semblables

Théorème : A et B, 2 matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors : $\det(A)_{\mathscr{B}} = \det(B)_{\mathscr{B}}$

Démonstration : On a $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1} \times A \times P$, d'où :

$$\begin{aligned} \det(B)_{\mathscr{B}} &= \det\left(P^{-1}\right)_{\mathscr{B}} \times \det(A)_{\mathscr{B}} \times \det(P)_{\mathscr{B}} \\ &= \det\left(P^{-1}\right)_{\mathscr{B}} \times \det(P)_{\mathscr{B}} \times \det(A)_{\mathscr{B}} \\ &= \det\left(P^{-1} \times P\right)_{\mathscr{B}} \times \det(A)_{\mathscr{B}} \\ &= \det(A)_{\mathscr{B}} \end{aligned}$$

■

3.4. Déterminant d'une matrice carrée A

Le problème est de montrer que le calcul du déterminant d'une matrice ne dépend pas de la base choisie.
C'est à dire que : $\det(A)_{\mathscr{B}} = \det(A)_{\mathscr{B}'}$.
Soit : $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(\psi)$
Soit aussi : $A' = \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(\varphi)$ et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$.
On a alors : $A' = P^{-1}AP$, et donc : $\det(A')_{\mathscr{B}'} = \det(A)_{\mathscr{B}'}$ en appliquant la propriété déjà montrée à la nouvelle base.
Enfin : $\det(A')_{\mathscr{B}'} = \det(\varphi) = \det(A)_{\mathscr{B}'} = \det(\psi)$.
Mais on a aussi : $\det(A)_{\mathscr{B}} = \det(\varphi) = \det(A)_{\mathscr{B}'}$. Ce qui achève la démonstation.
La notion de déterminant d'une matrice carrée a maintenant bien un sens.

3.5. Déterminant de la transposée d'une matrice

Théorème : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$\det\left({}^tA\right) = \det(A)$$

La démonstration est ici admise.

4. Calcul de déterminants

4.1. En dimension 2 et 3

On va d'abord retrouver un résultat bien connu :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} &= \det(u_1,u_2) = \det(a.e_1 + b.e_2, c.e_1 + d.e_2)_{\mathscr{B}} \\ &= ac\det(e_1,e_1)_{\mathscr{B}} + ad\det(e_1,e_2)_{\mathscr{B}} + bc\det(e_2,e_1)_{\mathscr{B}} + bd\det(e_2,e_2)_{\mathscr{B}} \\ &= 0 + ad - bc + 0 = ad - bc\end{aligned}$$

En dimension 3, on peut utiliser la règle de Sarrus, qui se montre de la même façon, en n'oubliant pas qu'elle n'est **absolument pas généralisable** à un ordre autre que 3...

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd$$

4.2. Déterminant d'une matrice triangulaire.

Théorème : $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & \cdots & y \\ 0 & a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & z \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_{n-1} \times a_n$

Démonstration : On factorise par a_1, et, en enlevant le bon nombre de fois le premier vecteur aux autres, on amène des 0 sur la première ligne et on obtient :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & \cdots & y \\ 0 & a_2 & s & & t \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & u \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 \times \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & \cdots & y \\ 0 & a_2 & s & & t \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & u \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & s & & t \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & u \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

On recommence ensuite avec a_2. On obtient ainsi de suite par une récurrence admise :

$$\Delta = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_{n-1} \times a_n \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_{n-1} \times a_n$$

■

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

La règle des signes est : $\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots & \cdots & \cdots & (-1)^{n+1} \\ - & + & - & & & & \\ + & - & + & & (-1)^{i+j} & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & & + & - \\ (-1)^{n+1} & & & & & - & + \end{vmatrix}$

> On remarque qu'on a $(-1)^{i+j}$ en $i^{ème}$ ligne et $j^{ème}$ colonne.

On développe suivant une ligne ou une colonne en tenant compte de la règle de signes $(-1)^{i+j} a_{ij}\,\Delta_{ij}$ où a_{ij} est le coefficient de la matrice et Δ_{ij} est le déterminant obtenu en enlevant la ligne i et la colonne j correspondante. On admet ce résultat.

Théorème : On peut développer selon la $j^{ème}$ colonne :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\,\Delta_{ij}$$

ou développer selon la $i^{ème}$ ligne :

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\,\Delta_{ij}$$

> Il est important de noter qu'on peut **choisir** sa ligne ou sa colonne.

> Un déterminant est donc un **polynôme** des coefficients de la matrice...

Corollaire : En utilisant les notations précédentes, M, une matrice inversible, alors :

$$M^{-1} = \frac{1}{\Delta} \times \text{transposée de} \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & (-1)^{i+j}\,\Delta_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

Démonstration : Le calcul de $M \times$ transposée de $\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & (-1)^{i+j}\,\Delta_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$ donne Δ pour les termes de la diagonale et 0 pour les autres puisque cela revient à développer un déterminant qui a 2 colonnes identiques. ■

4.4. Opérations sur les lignes et les colonnes d'un déterminant.

- inverser deux lignes ou deux colonnes multiplie le déterminant par -1
- ajouter à une ligne (ou une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (ou colonnes) ne change pas le déterminant.

4.5. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Théorème : $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, O est la matrice nulle de $\mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $p+q=n$. Alors,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix} = \det(A) \times \det(C)$$

On admet ce résultat.

> Cette propriété **ne se généralise pas** au déterminant d'une matrice définie par blocs et non triangulaire par blocs.

Exemple : On va calculer le déterminant : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \pi & \ln 2 & 17 \\ 3 & 4 & e & \ln 7 & -23 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \pi^2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

Ce déterminant est celui d'une matrice triangulaire par blocs, dont on fait ressortir ici la structure :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \pi & \ln 2 \\ e & \ln 7 \end{matrix} & \begin{matrix} 17 \\ -23 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \pi^2 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & (-3) \end{pmatrix}.$$

On a donc, en appliquant deux fois le théorème précédent :

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \times |-3| = (-2) \times 2 \times (-3) = 12$. Attention, ce ne sont pas des valeurs absolues...

4.6. Exemples

On notera les déterminants avec un indice qui correspond à leur rang, qui est toujours plus grand que 1.

a/ Utilisation d'une formule de récurrence

Soit le déterminant $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}_n$ qu'on développe selon la $1^{ère}$ colonne

$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1} = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$ en développant ce déterminant selon la $1^{ère}$ ligne.

On obtient ainsi la relation de récurrence $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$ qu'on résout en calculant Δ_1 et Δ_2.

b/ Manipulation de lignes ou colonnes

Soit le déterminant $\Delta_n = |\text{abs}\,(i-j)|_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}_n$ avec $n \geqslant 3$.

A chaque ligne, de la dernière à la seconde, on enlève la précédente. Ces opérations sont faites successivement... Il faut bien vérifier qu'on peut les faire successivement et qu'on n'utilise pas une ligne ou une colonne qui a été modifiée... et qui donc n'existe plus !

On obtient donc : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}_n$

A chaque ligne, de la dernière à la troisième, on enlève la précédente. Ces opérations sont faites successivement...

On obtient donc :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}_n = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & \cdots & n-1 \\ 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}_{n-1} = -(-1)^n (n-1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \end{vmatrix}_{n-2}$$

obtenu en développant successivement selon la première et la dernière colonne.

Enfin, $\Delta_n = (-1)^{n+1} (n-1)\, 2^{n-2}$

5. Compléments

5.1. Produit de matrices définies par blocs

Il ne s'agit pas ici à proprement parler de calculs de déterminants...

Si deux matrices sont définies par blocs, on peut parfois effectuer leur produit en travaillant par blocs. C'est à dire :

$$\begin{pmatrix} (A) & (B) \\ (C) & (D) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (A') & (B') \\ (C') & (D') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A)\times(A') + (B)\times(C') & (A)\times(B') + (B)\times(D') \\ (C)\times(A') + (D)\times(C') & (C)\times(B') + (D)\times(D') \end{pmatrix}$$

Les dimensions des matrices doivent être compatibles, à savoir :

- Le nombre de **colonnes** de A et C doit être le nombre de **lignes** de A' et B'.
- Le nombre de **colonnes** de B et D doit être le nombre de **lignes** de C' et D'.

D'autre part, rappelons que le produit de matrices n'est pas commutatif, l'ordre dans lequel on écrit ces produits est donc fondamental...

5.2. Avec Maple

Comme pour tout l'algèbre linéaire, il faut d'abord charger le pack `linalg` :

```
> with(linalg);
```

Ensuite, c'est simplement l'instruction `det` qui calcule un déterminant :
`> det(A);`
`> inverse(A);` inverse une matrice inversible.
`> transpose(A);` transpose une matrice, et
`> rank(A);` donne son rang. Pour ces 3 instructions, on se méfiera quand la matrice dépend d'un paramètre. Dans ce cas, la réponse fournie correspond en général au cas général.
On rappelle `vector` et `matrix` pour créer un vecteur ou une matrice, on rappelle que le produit des matrices est « `&*` » car Maple considère à priori tous les prduits comme commutatifs.
Enfin, l'instruction `evalm` est souvent nécessaire pour avoir le contenu effectif d'une matrice à l'écran.

5.3. Les mathématiciens du chapitre

Vandermonde Alexandre 1735-1796 Mathématicien français, il est le premier à étudier les déterminants pour eux-mêmes.

Laplace Pierre 1749-1827 Mathématicien, physicien et astronome, fils de fermier normand, il généralisera, entre autres, les règles de calcul des déterminants données par Vandermonde.