Sommaire

1. Applications de A non vide, $A \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ 1
   - 1.1. Espace vectoriel des app. définies sur A 1
   - 1.2. Limite et continuité en un point 1
   - 1.3. Espace vectoriel des app. continues sur A 2
   - 1.4. Image d'un fermé-borné 2
2. Applications de $A \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, Continuité 2
   - 2.1. Espace vectoriel $\mathscr{A}(A, \mathbb{R}^n)$ 3
   - 2.2. Limite, continuité en un vecteur u_0 3
   - 2.3. Espace vectoriel $\mathscr{C}^0(A, \mathbb{R}^p)$ 3
   - 2.4. Composée d'applications continues . . . 3
   - 2.5. Image d'un fermé-borné 4
3. Fonctions $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, Dérivées Premières 4
   - 3.1. Application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$ 4
   - 3.2. Différentielle 5
   - 3.3. Gradient 5
   - 3.4. Espace vectoriel $\mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \mathbb{R})$ 5
   - 3.5. Fonctions composées 6
4. Fonctions $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de Classe $\mathscr{C}^2$ 7
   - 4.1. Application de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U}$ 7
   - 4.2. Théorème de Schwarz 7
   - 4.3. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 . . . 7
   - 4.4. Extremums 7
5. Fonctions $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de Classe $\mathscr{C}^k$ 9
   - 5.1. Fonctions $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de Classe $\mathscr{C}^k$ 9
   - 5.2. Espace vectoriel $\mathscr{C}^k(\mathscr{U}, \mathbb{R})$ 10
6. Fonction Vectorielle $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, classe $\mathscr{C}^1$ 10
   - 6.1. Fonction de classe $\mathscr{C}^1$ 10
   - 6.2. Différentielle 10
   - 6.3. Cas où $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, Jacobien 11
   - 6.4. Composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ . . 11
   - 6.5. Fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, classe $\mathscr{C}^1$ 12
7. Equations aux dérivées partielles 12
   - 7.1. Equation du premier ordre 12
   - 7.2. Equation du second ordre 13
8. Compléments 14
   - 8.1. Les mathématiciens du chapitre 14
   - 8.2. Colbert, lycée numérique 14

1. Applications de A non vide, $A \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

1.1. Espace vectoriel des applications définies sur A non vide, $A \subset \mathbb{R}^p$ à valeur dans $\mathbb{R}$

Théorème : L'ensemble des applications $A \to \mathbb{R}$, avec A non vide, $A \subset \mathbb{R}^p$, muni de :

$$\begin{cases} \text{la somme des applications, notée } + \\ \text{le produit d'une application par un scalaire, noté } \cdot \end{cases}$$

a une **structure d'espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : $(\mathscr{A}(A, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel usuel, comme tout ensemble d'applications d'un ensemble non vide dans un espace vectoriel. ■

Définition : $f \in \mathscr{A}(A, \mathbb{R})$, on dit que f est bornée sur $A \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in A, \quad |f(u)| \leqslant M$

1.2. Limite et continuité en un point

Soit $f \in \mathscr{A}(A, \mathbb{R})$, $A \subset \mathbb{R}^p$, non vide. Soit $u_0 \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\forall r > 0, \quad \exists u \in A, \quad u \neq u_0, \quad d(u, u_0) \leqslant r$$

On ne s'intéressera à la limite de f qu'en de tels points.
Intuitivement, on peut dire que ces points de A ne sont pas des points « isolés » de A.
Si, de plus, $u_0 \in A$, on pourra s'intéresser à la continuité en un tel point.

Définition : Dans les conditions précédentes, on définit la **limite** de f en u_0 par :

$$\lim_{u \to u_0} f(u) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \quad \exists r > 0, \quad \forall u \in A, \quad u \neq u_0, \\ d(u, u_0) \leqslant r \Rightarrow |f(u) - l| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

Définition : Dans ces mêmes conditions, on dit que f est **continue** en $u_0 \Leftrightarrow \lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)$.

1.3. Espace vectoriel des applications continues sur A non vide, $A \subset \mathbb{R}^p$, à valeur dans $\mathbb{R}$

Définition : On dit que f est **continue** sur $A \Leftrightarrow f$ est continue en tout vecteur u_0 de A.

L'ensemble des applications continues de $A \subset \mathbb{R}^p$, non vide, dans $\mathbb{R}$, se note $\mathscr{C}^0(A, \mathbb{R})$.

Théorème : $\mathscr{C}^0(A, \mathbb{R})$ a une structure d'espace vectoriel, sous espace vectoriel de $\mathscr{A}(A, \mathbb{R})$.

Démonstration : La fonction constante nulle est bien continue sur A et appartient à $\mathscr{C}^0(A, \mathbb{R})$.
Ensuite, si f et g sont continues sur A, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f+g$ et $\lambda.f$ sont continues sur A, car la propriété est vraie en chaque vecteur u_0 de A. La démonstration est la même que pour les fonctions de variable réelle en remplaçant certaines valeurs absolues par des normes. ■

Théorème : Si $f, g \in \mathscr{C}^0(A, \mathbb{R})$, alors :
- le produit fg est continu sur A ;
- et le quotient $\dfrac{f}{g}$ est continu en tout vecteur u_0 de A tel que $g(u_0) \neq 0$.

Théorème : Les applications « composantes » : $f_i : \left(u_1, u_2, \ldots, u_p\right) \to u_i$ sont continues sur $\mathbb{R}^p$.

Définition : Soit f définie sur A et $(x_0, y_0) \in A$. Alors, les applications partielles :
- $f_{x_0} : y \to f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$;
- et, $f_{y_0} : x \to f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$

sont définies au voisinage respectivement de y_0 et x_0.

Théorème : Si f est continue en $(x_0, y_0) \in A$, alors :
- f_{x_0} est continue en y_0 ;
- et f_{y_0} est continue en x_0.

> La réciproque de ce théorème est fausse...

Exemple : On cherche la limite en $(0,0)$ de $f : (x, y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$
Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par application des théorèmes élémentaires.
$f(0, y) = 0$ et $f(x, x) = \dfrac{1}{2}$ prouve que f n'a pas de limite en $(0,0)$.

> Ce qui prouve bien, ici en $(0,0)$, que la continuité des applications partielles, n'entraîne pas la continuité de f.

1.4. Image d'une partie fermée bornée de A par $f \in \mathscr{C}^0(A, \mathbb{R})$

Théorème : $f \in \mathscr{C}^0(A, \mathbb{R})$, $B \subset A$, B une partie fermée et bornée, alors $f(B)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ et les bornes sont atteintes.

La démonstration est admise.

2. Applications de A dans $\mathbb{R}^n$, A non vide, $A \subset \mathbb{R}^p$, Continuité

Pour la limite et la continuité, on se place en un vecteur u_0 qui n'est pas « isolé » dans A, c'est à dire qui vérifie les conditions imposées pour les fonctions de plusieurs variables et à valeur réelle.
On rappelle que cela signifie : $u_0 \in \mathbb{R}^p$ tel que : $\quad \forall r > 0, \quad \exists u \in A, \quad u \neq u_0, \quad d(u, u_0) \leqslant r$.

2.1. Espace vectoriel $\mathscr{A}(A, \mathbb{R}^n)$

Théorème : L'ensemble des applications $A \to \mathbb{R}^n$, noté $\mathscr{A}(A, \mathbb{R}^n)$ avec A non vide, $A \subset \mathbb{R}^p$, muni de :

$$\begin{cases} \text{la somme des applications, notée } + \\ \text{le produit d'une application par un scalaire, noté } \cdot \end{cases}$$

a une **structure d'espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : C'est encore l'ensemble des applications d'un ensemble non vide dans un espace vectoriel. ■

2.2. Limite, continuité en un vecteur u_0

Définition : $f \in \mathscr{A}(A, \mathbb{R}^n)$, on dit que

$$\lim_{u \to u_0} f(u) = l \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \quad \exists r > 0, \quad \forall u \in A, \quad u \neq u_0, \quad \|u - u_0\| \leqslant r \Rightarrow \|f(u) - l\| \leqslant \varepsilon]$$

Définition : Si, de plus, $u_0 \in A$, f est continue en $u_0 \Leftrightarrow \lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)$.

En fait, on se retrouve avec n applications « composantes » de p variables réelles.

Théorème : $l = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ et $f(u) = (f_1(u), f_2(u), \ldots, f_n(u))$

$$\lim_{u \to u_0} f(u) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{u \to u_0} f_1(u) = l_1 \\ \lim\limits_{u \to u_0} f_2(u) = l_2 \\ \vdots\vdots \\ \lim\limits_{u \to u_0} f_n(u) = l_n \end{cases}$$

Corollaire : f est continue en $u_0 \in A \Leftrightarrow f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont continue en u_0.

> L'idée importante est que tout se passe composante par composante.
> Ce qui justifie qu'on a d'abord travaillé avec des fonctions à valeur réelle.

Démonstration : La démonstration est la même que la démonstration précédente en remplaçant, où il le faut, des valeurs absolues par des normes (ou des distances). ■

2.3. Espace vectoriel $\mathscr{C}^0(A, \mathbb{R}^p)$

Théorème : L'ensemble des applications continues $A \to \mathbb{R}^n$, noté $\mathscr{C}^0(A, \mathbb{R}^n)$ avec A non vide, $A \subset \mathbb{R}^p$, muni de : $\begin{cases} \text{la somme des applications, notée } + \\ \text{le produit d'une application par un scalaire, noté } \cdot \end{cases}$
a une **structure d'espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : C'est clairement un sous espace vectoriel de $\mathscr{A}(A, \mathbb{R}^n)$. ■

2.4. Composée d'applications continues

Théorème : Soit $f \in \mathscr{A}(A, \mathbb{R}^p)$, $A \subset \mathbb{R}^m$, A non vide.
Soit $u_0 \in A$, f continue en u_0.
Soit $g \in \mathscr{A}(B, \mathbb{R}^q)$, $B \subset \mathbb{R}^p$, $f(A) \subset B$, g continue en $f(u_0)$.
On a ainsi : $g \circ f$, $\mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p \xrightarrow{g} \mathbb{R}^q$ qui est bien défini et dont on peut étudier la continuité en u_0.

Ce qui donne :

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ continue en } u_0 \\ g \text{ continue en } f(u_0) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f \text{ est continue en } u_0.$$

Démonstration : On écrit les deux relations de continuité.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists r > 0, \quad \forall u \in \mathrm{A}, \quad \|u - u_0\| \leqslant r \Rightarrow \|f(u) - f(u_0)\| \leqslant \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon' > 0, \quad \exists r' > 0, \quad \forall v \in \mathrm{B}, \quad \|v - v_0\| \leqslant r' \Rightarrow \|g(v) - g(v_0)\| \leqslant \varepsilon'$$

On prend $\varepsilon' > 0$, d'où $r' > 0$, on prend $\varepsilon = r'$, d'où $r > 0$, et
pour $u \in \mathrm{A}$,

$$\|u - u_0\| \leqslant r \Rightarrow \|f(u) - f(u_0)\| \leqslant \varepsilon = r' \Rightarrow \|g(f(u)) - g(f(u_0))\| \leqslant \varepsilon'$$

et enfin

$$\forall \varepsilon' > 0, \quad \exists r > 0, \quad \forall u \in \mathrm{A}, \quad \|u - u_0\| \leqslant r \Rightarrow \|g(f(u)) - g(f(u_0))\| \leqslant \varepsilon'.$$

■

On a maintenant les outils pour montrer facilement la continuité de la plupart des fonctions usuelles.

2.5. Image d'une partie fermée bornée de A par $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{A}, \mathbb{R}^n)$

Théorème : $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{A}, \mathbb{R}^n)$, $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$, B une partie fermée et bornée, alors $f(\mathrm{B})$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.

La démonstration est admise.

3. Fonctions $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, Dérivées Premières

Dans cette partie, toutes les fonctions sont supposées définies sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^p$. On travaillera toujours sur ce domaine $\mathscr{U}$, sur lequel on a donc une application.

3.1. Application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$

Définition : $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, définie sur $\mathscr{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^p$, on appelle **dérivée partielle de** f par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable, au point $u = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \lim_{t \to x_i} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, t, \ldots, x_p) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_p)}{t - x_i}$$

si cette limite existe.
Sinon, on dit que f n'admet pas de dérivée partielle par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable,
au point $u = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$.
On parle parfois de dérivée partielle première.

> Quand il n'y a que 2 ou 3 variables on note souvent les dérivées partielles,
>
> $$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{ou même} \quad \frac{\partial g}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial g}{\partial \theta}$$
>
> Mais, on n'oubliera pas, en cas d'ambiguïté, qu'il s'agit des dérivées par rapport à la première, la seconde, ou la $i^{\text{ème}}$ variable...

Définition : f est de **classe** $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p \Leftrightarrow f$ admet p dérivées partielles continues sur $\mathscr{U}$.
C'est à dire : $\forall i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est définie et continue sur $\mathscr{U}$

3.2. Différentielle d'une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$

Définition : $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, définie sur $\mathscr{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^p$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$, on appelle **différentielle de** f en $u = \left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right)$, l'application linéaire notée $\mathrm{d}f_u : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

$$\left(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_p\right) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(u)\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(u)\,\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(u)\,\mathrm{d}x_p$$

noté le plus souvent, pour alléger les notations : $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_p}\mathrm{d}x_p$

Dans le cas de 2 ou 3 variables, on note souvent la **différentielle de** f **en** (x_0, y_0, z_0) :

$$(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\,\mathrm{d}z$$

ou bien : $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z$

3.3. Gradient

Définition : $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, définie sur $\mathscr{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^p$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$, $u = \left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) \in \mathscr{U}$

On appelle **gradient de** f en u, noté $\overrightarrow{Grad_u(f)}$ le vecteur : $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(u) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(u) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(u) \end{pmatrix}$

Ce gradient a une grande importance dans l'étude des courbes d'équation $f(x, y) = 0$ ou des surfaces d'équation $f(x, y, z) = 0$ dans un repère orthonormal.

3.4. Espace vectoriel $\mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \mathbb{R})$

Théorème : L'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, à valeur réelle, muni de :

$$\begin{cases} \text{La somme des applications} \\ \text{Le produit d'une application par une constante} \end{cases}$$

a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : On montre que c'est un sous espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathscr{U}, \mathbb{R})$.
Clairement, $\mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \mathbb{R})$:
- est stable par combinaison linéaire
- et non vide.

■

3.5. Différentielle et dérivées partielles de fonctions composées

On écrit le théorème pour une fonction de 3 variables. L'énoncé pour une fonction de p variables s'en déduit facilement.

Théorème : $\left.\begin{array}{r} x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur I} \\ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathscr{U} \text{ contenant } x(\mathrm{I}) \times y(\mathrm{I}) \times z(\mathrm{I}) \\ \mathrm{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ définie par } \forall t \in \mathrm{I},\ \mathrm{F}(t) = f(x(t), y(t), z(t)) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{F} \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur I,}$

et :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{F}'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z} z'(t)$$

Ou encore, en utilisant la notation différentielle : $\dfrac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$

Bien sûr, toutes les dérivées partielles sont prises en $(x(t), y(t), z(t))$ et les dérivées en t.

Démonstration : On écrit la démonstration pour une fonction de 2 variables seulement !

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(t+\mathrm{d}t) - \mathrm{F}(t) &= f(x(t+\mathrm{d}t), y(t+\mathrm{d}t)) - f(x(t), y(t)) \\
&= f\left(x(t) + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t),\, y(t) + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t)\right) - f(x(t), y(t)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} \times \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t)\right) + \frac{\partial f}{\partial y} \times \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t)\right) \\
&\quad + o\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t)\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,o(\mathrm{d}t) + \frac{\partial f}{\partial y}\,o(\mathrm{d}t)\right) + o(\mathrm{d}t) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + o(\mathrm{d}t)
\end{aligned}$$

■

Théorème : On écrit ce théorème pour la composée de fonctions de plusieurs variables avec 2 et 3 variables.
Ceci est bien sûr arbitraire, le théorème s'applique avec p et q variables...

$$\left.\begin{array}{r} f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathscr{U} \text{ un ouvert de } \mathbb{R}^3 \\ u, v, w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathscr{V} \text{ un ouvert de } \mathbb{R}^2 \\ \forall x, y \in \mathscr{V}, (u(x,y), v(x,y), w(x,y)) \in \mathscr{U} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{F} : \left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{V} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & f(u(x,y), v(x,y), w(x,y)) \end{array}\right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{V}$ et :

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$$

On a aussi changé les notations parce qu'il faut pouvoir s'adapter !
Démonstration : Quand on fixe y, on se retrouve exactement dans les hypothèses du théorème précédent. Ce qui donne $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}$. De même, on fixe x pour obtenir $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}$. ■

4. Fonctions $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de Classe $\mathscr{C}^2$, Dérivées Secondes

4.1. Application de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U}$

Définition : $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, définie sur $\mathscr{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^p$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$,
on dit que f est de **classe** $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U} \Leftrightarrow$ les p applications $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_p}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$.

L'application $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ est la $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle de la $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle se note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.
Il y a donc à priori p^2 dérivées partielles secondes.

4.2. Théorème de Schwarz

On admettra ce théorème important.

Théorème : f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U} \Rightarrow \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

On dit que pour f de classe $\mathscr{C}^2$, les dérivées partielles secondes croisées sont égales.

4.3. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Théorème : f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $u \in \mathscr{U}$. Alors :

$$f(u+\mathrm{d}u) = f(u) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(u)\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(u)\,\mathrm{d}x_2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(u)\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(u)\,\mathrm{d}x_2\right)^{[2]} + o\left(\|\mathrm{d}u\|^2\right)$$

Avec, $^{[2]}$ qui est un pseudo-carré où, au lieu d'avoir des produits de dérivées partielles, on a des composées.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(u)\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(u)\,\mathrm{d}x_2\right)^{[2]} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\,\mathrm{d}x_1^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\,\mathrm{d}x_2^2$$

4.4. Extrémums d'une application de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$

On va d'abord chercher une condition nécessaire d'existence d'un extrémum pour une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$.

Théorème : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie sur $\mathscr{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^2$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$, $u \in \mathscr{U}$, u en extrémum local de f. Alors, $\mathrm{d}f_u = 0$, c'est à dire : $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(u) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(u) = 0$
Une condition **nécessaire** pour que f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$, admette un extrémum est que toutes les dérivées partielles sont nulles.

Définition : Un point u de $\mathscr{U}$ tel que toutes les dérivées partielles sont nulles est un point **critique** de f.

Démonstration : Si on a un extrémum, $f(u+\mathrm{d}u) - f(u) = \mathrm{A}$ est de signe constant pour $\|\mathrm{d}u\|$ assez petit.
C'est à dire que : $\mathrm{A} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(u)\,\mathrm{d}x_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(u)\,\mathrm{d}x_2\right) + o(\mathrm{d}u)$ est de signe constant.
Si la partie régulière est non nulle, pour $\|\mathrm{d}u\|$ assez petit, la quantité A donnée est du signe de cette partie régulière. Mais en changeant $\mathrm{d}u$ en $-\mathrm{d}u$, cette partie régulière est changée en son opposé. La quantité A change donc de signe, ce qui est impossible. La partie régulière est donc nulle :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(u)\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(u)\,\mathrm{d}x_2 = 0 \quad \text{pour tous} \quad (\mathrm{d}x_1,\ \mathrm{d}x_2)$$

Ce qui prouve que : $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(u) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(u) = 0.$ ■

Théorème : f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \mathscr{U}$, un point critique de f. On pose :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

- Si $s^2 - rt < 0$ (x_0, y_0) est un extrémum (minimum pour $r > 0$, maximum pour $r < 0$)
- Si $s^2 - rt > 0$ (x_0, y_0) est un col
- Si $s^2 - rt = 0$ on ne peut pas conclure, il faut chercher le signe de $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ au voisinage de (x_0, y_0).

Démonstration : On utilise la formule de Taylor-Young à l'ordre 2. On note $\mathrm{d}x = (x - x_0)$ et $\mathrm{d}y = (y - y_0)$

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)^{[2]} + o\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)^{[2]} + o\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(r\,\mathrm{d}x^2 + 2s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + t\,\mathrm{d}y^2\right) + o\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2\right) \end{aligned}$$

On pose : $\Delta = 4\left(s^2 - rt\right)$

- Si $\Delta < 0$, $\left(r\,\mathrm{d}x^2 + 2s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + t\,\mathrm{d}y^2\right)$ ne change strictement pas de signe, donc pour $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ assez petit, $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ ne change pas de signe.
  On a un bien un extrémum.
- Si $\Delta > 0$, $\left(r\,\mathrm{d}x^2 + 2s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + t\,\mathrm{d}y^2\right)$ change strictement de signe,
  donc pour $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ assez petit, $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ change de signe.
  On a ici un col.
- Si $\Delta = 0$, tout dépend du signe de $o\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2\right)$ lorsque $\left(r\,\mathrm{d}x^2 + 2s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + t\,\mathrm{d}y^2\right)$ s'annule.
  Comme on ne connait pas ce signe, on ne peut pas conclure.

■

En pratique, $z = f(x, y)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

- On cherche les points critiques, qui vérifient : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$
- Les extremums sont à chercher parmi les points critiques.
- On calcule les expressions théoriques de r, s, et t.
- En chaque point critique (x_0, y_0), on calcule $\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{cases}$
  - Si $s^2 - rt < 0$ (x_0, y_0) est un extremum (minimum pour $r > 0$, maximum pour $r < 0$)
  - Si $s^2 - rt > 0$ (x_0, y_0) est un col
  - Si $s^2 - rt = 0$ on ne peut pas conclure, il faut chercher le signe de $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ selon d'autres moyens.

Exemple : Cherchons sur $\mathbb{R}^2$ les extremums de $f : (x, y) \to x^3 + y^3$
On cherche d'abord les points critiques.

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$
Il n'y a qu'un seul point critique $(0,0)$.
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x = 0 = r$ en $(0,0)$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = s$ en $(0,0)$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y = 0 = t$ en $(0,0)$
En $(0,0)$, $s^2 - rt = 0$, le théorème ne permet pas de conclure.
Mais $f(x,y) - f(0,0) = x^3 + y^3$ et $f(-x,-y) - f(0,0) = -x^3 - y^3$ expression de signe opposé.
Ainsi $f(x,y) - f(0,0)$ change de signe au voisinage du point critique : $(0,0)$ est un point col.

On va ici donner deux exemples sous forme de surfaces où $(0,0)$ est un point critique, on a aussi représenté la fonction nulle qui donne un plan.
Le premier exemple est la figure 1, ci-dessous.
La fonction étudiée est : $-\left(x^2 + y^2\right)$ où $r = -2$, $s = 0$, $-t = 2$, $s^2 - rt = -4$
C'est un point ballon, un maximum

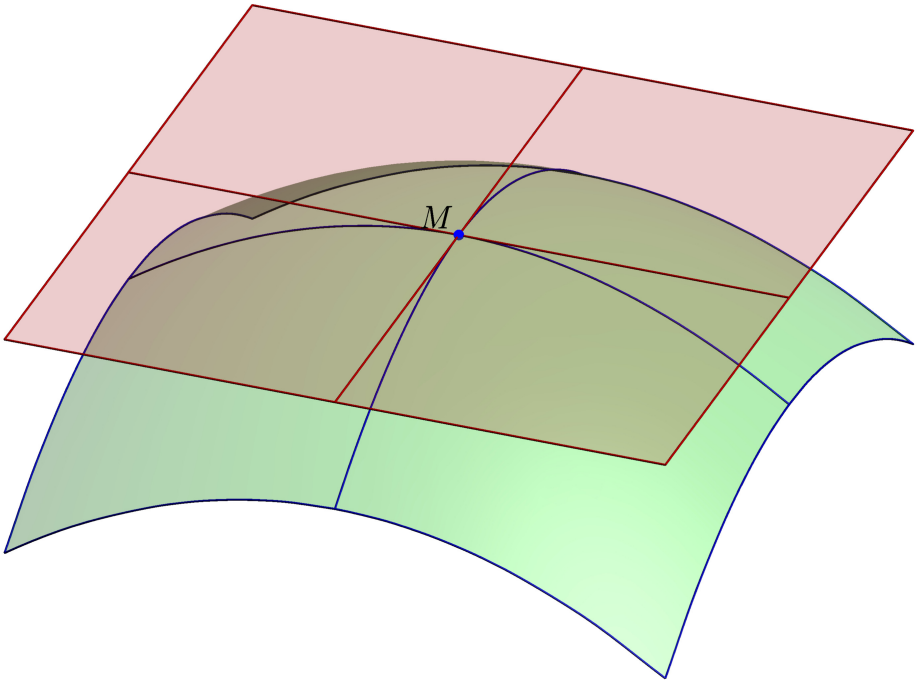

Figure 1 – **Point ballon (maximum)**

Le deuxième exemple est la figure 2, page suivante.
La fonction étudiée est : $x^2 - y^2$ où $r = 2$, $s = 0$, $t = -2$, $s^2 - rt = 4$
C'est un point col.

5. Fonctions $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de Classe $\mathscr{C}^k$, Dérivées d'ordre supérieur

5.1. Fonctions $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de Classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$

Définition : $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est de Classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, avec $k \geqslant 1$,
$\Leftrightarrow f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et toutes les dérivées partielles sont de classe $\mathscr{C}^{k-1}$.

Le théorème de Schwarz appliqué un certain nombre de fois permet de calculer n'importe quelle dérivée partielle en dérivant dans n'importe quel ordre, dans la limite de k dérivations pour une application de classe $\mathscr{C}^k$.

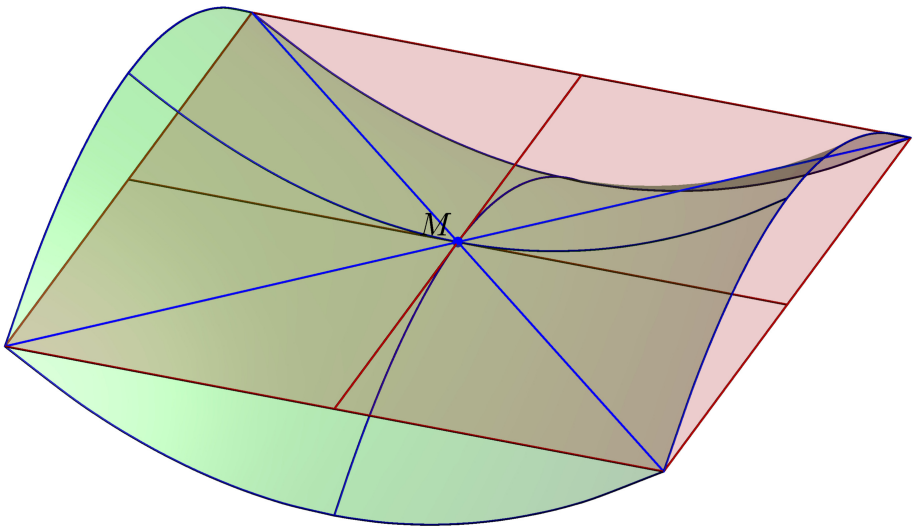

Figure 2 – **Point col**

5.2. Espace vectoriel $\mathscr{C}^k(\mathscr{U},\mathbb{R})$

Théorème : $\mathscr{C}^k(\mathscr{U},\mathbb{R})$ a une structure d'espace vectoriel, sous espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(\mathscr{U},\mathbb{R})$.

Démonstration : La démonstration est élémentaire. On a clairement la stabilité par combinaison linéaire et le caractère non vide, grâce à la fonction nulle. ■

6. Fonction Vectorielle $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, classe $\mathscr{C}^1$

6.1. Fonction de classe $\mathscr{C}^1$

Définition : Soit $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, définie sur $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On dit que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$
$\Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $f_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ (les applications coordonnées de F), sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$.

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, p\} : \quad \frac{\partial F}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_j} \end{pmatrix} \text{ est aussi une fonction } \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n.$$

> Notons bien que $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}$ est un vecteur colonne.

6.2. Différentielle d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, matrice jacobienne

Définition : Soit $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$.
La **différentielle** de F en u, notée dF_u, est l'application linéaire :

$$\mathrm{dF}_u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R}^n \\ \left(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_p\right) & \mapsto & \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_p}\mathrm{d}x_p \end{array} \right.$$

Coordonnée par coordonnée, on a la différentielle de chaque f_i en u.

Définition : La **matrice jacobienne** de F en u est la matrice (dans la base canonique) de la différentielle de F en u.
Toutes les dérivées partielles étant prises en u, la **matrice jacobienne** de F en u est :

$$\mathrm{J_F}(u) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_p} \end{pmatrix}$$

Les vecteurs colonne de la matrice jacobienne de F sont les $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_j}$.

6.3. Cas où $\mathrm{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, Jacobien

Définition : Dans le cas où $n = p$, le déterminant de la matrice jacobienne de F en u est appelé **jacobien de** F en u.

6.4. Composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Théorème : $\left.\begin{array}{r} \mathrm{F} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathscr{U} \text{ un ouvert de } \mathbb{R}^p \\ \mathrm{G} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathscr{V} \text{ un ouvert de } \mathbb{R}^m \\ \mathrm{F}(\mathscr{U}) \subset \mathscr{V} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{G} \circ \mathrm{F}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$ et,

$$\mathrm{J_{G\circ F}} = \mathrm{J_G} \times \mathrm{J_F}$$
$$\mathrm{J_{G\circ F}}(u) = \mathrm{J_G}(\mathrm{F}(u)) \times \mathrm{J_F}(u)$$

Démonstration : On appelle $(f_1, \ldots, f_m)$ et $(g_1, \ldots, g_n)$ les composantes de F et de G.
On note $u = \left(x_1, \ldots, x_p\right)$ et :

$$\mathrm{F}(u) = (y_1, \ldots, y_m) = (f_1(u), \ldots, f_m(u)) = \left(f_1\left(x_1, \ldots, x_p\right), \ldots, f_m\left(x_1, \ldots, x_p\right)\right)$$

$$\mathrm{G}(\mathrm{F}(u)) = \begin{pmatrix} g_1(y_1, \ldots, y_m) \\ \vdots \\ g_n(y_1, \ldots, y_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1\left(f_1\left(x_1, \ldots, x_p\right), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\right) \\ \vdots \\ g_n\left(f_1\left(x_1, \ldots, x_p\right), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1\left(x_1, \ldots, x_p\right) \\ \vdots \\ h_n\left(x_1, \ldots, x_p\right) \end{pmatrix}$$

Ces composantes sont clairement de classe $\mathscr{C}^1$. Pour alléger les notations, on ne précise plus en quels points on prend ces dérivées partielles. En appliquant le théorème de dérivation des fonctions com-

posées, on a :

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_i}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \frac{\partial g_i}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial g_i}{\partial y_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_1}, \frac{\partial g_i}{\partial y_2}, \cdots, \frac{\partial g_i}{\partial y_m}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

On reconnait bien sûr le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice jacobienne de G par la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice jacobienne de F.
Ce qui est bien l'élément $i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice jacobienne de $G \circ F$. ■

6.5. Fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, classe $\mathscr{C}^1$

Théorème :
$$\left.\begin{array}{r} F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathscr{U} \text{ un ouvert de } \mathbb{R}^n \\ F : \mathscr{U} \to \mathscr{V} \text{ bijective} \\ F^{-1} : \mathscr{V} \to \mathscr{U} \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathscr{V} \\ u \in \mathscr{U}, \text{ et } v = F(u) \end{array}\right\} \Rightarrow J_{F^{-1}}(v) = (J_F(u))^{-1}$$

La matrice jacobienne de F^{-1} en $v = F(u)$ est l'inverse de la matrice jacobienne de F en u.

Démonstration : On a : $F^{-1} \circ F = Id$
La matrice jacobienne de l'identité en tout point est I_n.
D'où : $J_{F^{-1}}(v) \times J_F(u) = I_n$ ce qui donne le résultat.
Ceci prouve d'ailleurs au passage que, dans ces conditions, le jacobien est non nul, c'est à dire que la matrice jacobienne est inversible. ■

Corollaire : Dans les mêmes conditions, le jacobien de F^{-1} en $v = F(u)$ est l'inverse du jacobien de F en u.

Si on pose $(X, Y) = F(x, y)$, le jacobien de F en (x, y) se note $\dfrac{D(X, Y)}{D(x, y)}$.

7. Equations aux dérivées partielles

7.1. Equation aux dérivées partielles du premier ordre

a/ Equation simple

Théorème : Les solutions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^2$, de l'équation : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(x, y)$
avec g continue sur $\mathscr{U}$ sont de la forme : $f(x, y) = \displaystyle\int g(x, y)\,dx + K(y)$ où :

- $\displaystyle\int g(x, y)\,dx$ est une primitive quelconque de g par rapport à x ;
- K est une application quelconque de classe $\mathscr{C}^1$ sur la projection de $\mathscr{U}$ sur Oy.

Démonstration : On travaille comme si y était un paramètre constant, la constante K d'intégration est donc constante quand y est constant, c'est donc une application de y de classe $\mathscr{C}^1$, comme f. ■

b/ Système

On étudie ici les systèmes différentiels d'équations aux dérivées partielles dans le cas le plus simple.

Pour résoudre sur $\mathscr{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^2$, le système : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = h(x,y) \end{cases}$

- On vérifie d'abord que les **dérivées partielles croisées** sont **égales**, en dérivant la première équation par rapport à x et la seconde par rapport à y.
  Si ça n'est pas le cas, il y a peu de chances qu'il y ait des solutions puisque f ne peut être de classe $\mathscr{C}^2$.
- On intègre **la première équation**, ce qui donne une fonction inconnue $\mathrm{K}(y)$;
- puis on **dérive par rapport** y l'expression de f obtenue ;
- et enfin, on **réinjecte** le résultat obtenu dans la deuxième équation, ce qui donne une expression de $\mathrm{K}'(y)$ qu'on intègre.

Exemple : Considérons le système : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x+1)\cos(x+y) + \sin(x+y) - \sin x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x+1)\cos(x+y) \end{cases}$

On calcule les dérivées partielles secondes croisées : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \cos(x+y) - (x+1)\sin(x+y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$.
Cette égalité étant vérifiée, on intègre maintenant l'équation la plus simple, visiblement la seconde.
Ceci donne : $f(x,y) = (x+1)\sin(x+y) + \mathrm{K}(x)$.
On dérive maintenant cette égalité par rapport à x, et on obtient :
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x+1)\cos(x+y) + \sin(x+y) + \mathrm{K}'(x) = (x+1)\cos(x+y) + \sin(x+y) - \sin x$.
On en déduit : $\mathrm{K}'(x) = -\sin x$ et donc $\mathrm{K}(x) = \cos x + cte$.
Finalement : $f(x,y) = (x+1)\sin(x+y) + \cos x + cte$.

> Si c'est plus simple, on peut inverser l'ordre des deux équations.

> En **aucun cas**, on n'intègre les deux équations séparément, car, on obtient alors deux expressions différentes de f dont on ne sait pas quoi faire...

7.2. Equation aux dérivées partielles du second ordre

a/ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$

Théorème : Les solutions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^2$, de l'équation : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$
sont de la forme : $f(x,y) = x\,\mathrm{K}(y) + \mathrm{L}(y)$
où K et L sont des applications quelconques de classe $\mathscr{C}^2$ sur la projection de $\mathscr{U}$ sur Oy.

Démonstration : On utilise deux fois le théorème sur le premier ordre. ■

b/ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$

Théorème : Les solutions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^2$, de l'équation : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$
sont de la forme : $f(x,y) = \mathrm{K}(x) + \mathrm{L}(y)$

où K et L sont des applications quelconques de classe $\mathscr{C}^2$ sur la projection de $\mathscr{U}$ sur Ox et Oy respectivement.

Démonstration : On utilise deux fois le théorème sur le premier ordre et le fait qu'une primitive quelconque d'une application quelconque de classe $\mathscr{C}^1$ est une application quelconque de classe $\mathscr{C}^2$...
■

c/ Exemple : équation de propagation de d'Alembert

Sous sa forme la plus simple, cette équation est : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$

On pose : $f(x,t) = g(u,v)$ avec : $\begin{cases} u = x - c\,t \\ v = x + c\,t \end{cases}$ en posant f et g de classe $\mathscr{C}^2$.

On utilisera sans le rappeler à chaque fois le théorème de Schwarz et le théorème sur les dérivées de fonctions composées.

On obtient facilement : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f}{\partial t} = -c\dfrac{\partial g}{\partial u} + c\dfrac{\partial g}{\partial v} \end{cases}$

En dérivant une seconde fois : $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -c\left(-c\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + c\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\right) + c\left(-c\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + c\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) \end{cases}$

On obtient donc, après simplification : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} = 0.$

Ce qui donne : $g(u,v) = \mathrm{K}(u) + \mathrm{L}(v)$,
et enfin :

$$f(x,t) = \mathrm{K}(x - c\,t) + \mathrm{L}(x + c\,t)$$

K et L étant des applications quelconques de classe $\mathscr{C}^2$.

8. Compléments

8.1. Les mathématiciens du chapitre

Schwarz Hermann Amandus 1843-1920 Il est l'auteur du théorème qui porte son nom, et aussi du théorème de Cauchy-Schwarz. Ses travaux portent aussi sur les équations de Laplace, les fonctions harmoniques et la théorie du potentiel ...

8.2. Colbert, lycée numérique

a/ Maple

On traite une fonction de plusieurs variables comme une fonction ordinaire, tant du point de vue de la dérivation que de l'intégration.
Pour le jacobien et le gradient, comme ce sont des vecteurs et des matrices, on a besoin du package « `linalg` ».

- C'est « `jacobian` » qui permet de calculer une matrice jacobienne. Si elle est carrée, son déterminant est le jacobien.
- C'est « `grad` » qui permet de calculer un gradient de fonction de plusieurs variables. Celui-ci possède des options pour le calcul direct en coordonnées sphérique ou cylindriques. Je vous renvoie à l'aide Maple.

b/ HP 40G-GS

On traite une fonction de plusieurs variables comme une fonction ordinaire, tant du point de vue de la dérivation que de l'intégration.
Il faut utiliser $\int$, `L4C3`, pour intégrer ou primitiver, la fonction `RISCH` pour primitiver et `d/dx`, `L4C3`, ou `DERIV` pour dériver selon une variable donnée, fonctions du menu `DIFF` du `CAS`

c/ HP 50G

On traite une fonction de plusieurs variables comme une fonction ordinaire, tant du point de vue de la dérivation que de l'intégration.
Les fonctions utiles sont dans le menu `CALC`, sous-menu `DERIV. & INTEG.`
On utilise $\int$, `L5C5`, pour intégrer ou primitiver, la fonction `RISCH` pour primitiver et ∂, `L5C4`, ou `DERIV` pour dériver selon une variable donnée.

d/ TI 89

On traite une fonction de plusieurs variables comme une fonction ordinaire, tant du point de vue de la dérivation que de l'intégration.
On utilise d, `L7C3`, pour dériver et, $\int$, `L7C2` pour intégrer ou primitiver une fonction.

e/ TI N-inspire CAS

On traite une fonction de plusieurs variables comme une fonction ordinaire, tant du point de vue de la dérivation que de l'intégration.
On utilise les mêmes fonctions que dans la TI 89, mais on peut aussi utiliser avec profit le catalogue de modèles, `Catalog -- "modèles"`...

f/ ClassPad 300

On traite une fonction de plusieurs variables comme une fonction ordinaire, tant du point de vue de la dérivation que de l'intégration.
Il faut aller dans le menu `Action`, sous-menu `Calculation`.
`diff` et $\int$ donnent alors la dérivation et l'intégration ou la recherche d'une primitive.