Sommaire

Figures

Ce chapitre étudie quelques surfaces particulières : les cylindres et cônes qui sont formés de droites, les surfaces de révolution et les quadriques. Enfin, on traitera à part les cylindres et cônes de révolution.
Dans tout le chapitre, $\mathbb{R}^3$ sera muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. Cylindres

1.1. Cylindre, génératrice et directrice

Définition :
Un **cylindre de direction** $\vec{u}$ est une surface formée d'une famille de droites de direction $\vec{u}$.
Ces droites sont les **génératrices** du cylindre.
Une courbe qui rencontre toutes les génératrices est une **directrice**.
L'intersection de la surface avec un plan perpendiculaire à la direction $\vec{u}$, est une **section droite** du cylindre.

On peut voir sur figure 1, page suivante, deux exemples de cylindres, au sens mathématique du terme !

Un cylindre n'est pas, en général, un cylindre de révolution !

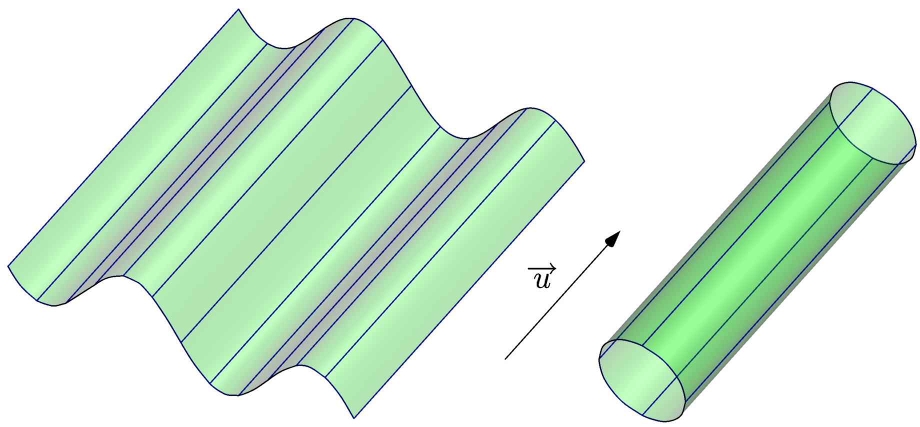

Figure 1 – **Exemples de cylindres**

Définition : Si $\mathcal{S}$ est une surface, l'ensemble des points M de $\mathcal{S}$ tels que la direction du plan tangent à $\mathcal{S}$ en M contient $\overrightarrow{u}$ est le **contour apparent** de $\mathcal{S}$ dans la direction $\overrightarrow{u}$.
Le cylindre de direction $\overrightarrow{u}$ et de directrice ce contour apparent est le **cylindre circonscrit** à $\mathcal{S}$ dans la direction $\overrightarrow{u}$.

1.2. Équation générale d'un cylindre

Théorème : $\mathcal{S}$ est un cylindre de direction $\overrightarrow{k} \Leftrightarrow \mathcal{S}$ a une équation de la forme : $F(x,y) = 0$.
C'est aussi, dans le plan xOy, l'équation de la section droite de $\mathcal{S}$.

> La courbe d'équation $F(x,y) = 0$ dans le plan xOy est la section droite du cylindre d'équation $F(x,y) = 0$ dans l'espace.
> Ainsi, **l'interprétation** d'une équation incomplète (en x, ou y ou z) est celle, dans le plan considéré, d'une courbe ou, dans l'espace, d'une surface...

De même, s'il manque y dans l'équation, on a un cylindre de direction $\overrightarrow{j}$.
Démonstration : On admet que $\mathcal{S}$ a une équation de la forme $H(x,y,z) = 0$.

Mais, si $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{S}$, la droite $\left(M_0, \overrightarrow{k}\right)$ est tracée sur $\mathcal{S}$ et donc :$\forall z \in \mathbb{R}, H(x_0, y_0, z) = 0$

Ce qui prouve qu'en fait, H ne dépend pas de z. On peut donc écrire : $H(x,y,z) = F(x,y)$ ■

Théorème : $\mathcal{S}$ est un cylindre de direction $\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \mathcal{S}$ a une équation de la forme :

$$F(P_1, P_2) = 0$$

avec $P_1(x,y,z) = k_1$ et $P_2(x,y,z) = k_2$, l'équation de deux plans.
Et enfin, $P_1 \cap P_2$ donne la direction $\overrightarrow{u}$.

Démonstration : Un changement de repère orthonormal où $\overrightarrow{K} // \overrightarrow{u}$, fournit $F(X,Y) = 0$, et en revenant dans le repère d'origine, $F(P_1, P_2) = 0$. ■

1.3. Plan tangent le long d'une génératrice

Théorème : Le plan tangent à un cylindre le long d'un génératrice est invariant.

Démonstration : Quitte à changer de repère, on peut travailler avec $F(x,y)=0$. Le plan tangent le long de la génératrice (x_0, y_0, λ) est d'équation :

$$(x-x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=0$$

qui clairement ne contient pas λ. ∎

1.4. Équation d'un cylindre de direction et de directrice données

On va chercher l'équation d'un cylindre Σ de direction $\overrightarrow{u}$ et de directrice Γ donnés.
- Faire une figure symbolique, comme la figure 2, ci-dessous.

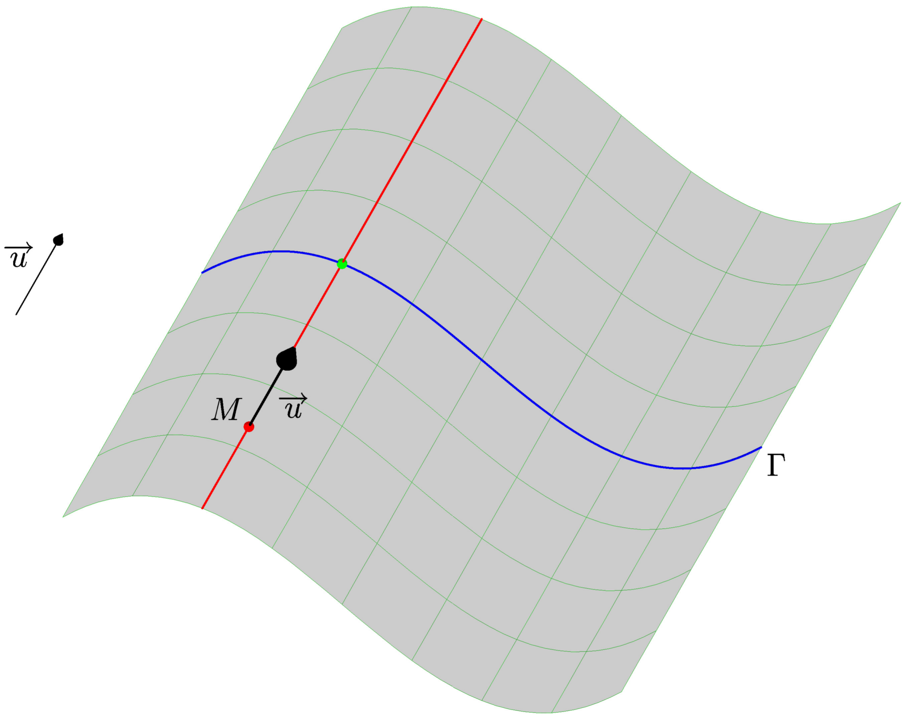

Figure 2 – **Cylindre : direction et directrice**

- Partir d'un point **quelconque** du cylindre Σ cherché $M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$
- Écrire que la droite, décrite en paramétrique, $\left(M, \overrightarrow{u}\right)$ rencontre Γ : $\exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ M + \lambda\overrightarrow{u} \in \Gamma$
  Pour cela, on a, en pratique, deux cas selon que Γ est donnée en paramétriques ou par intersection de surfaces.
  - Si Γ est définie en paramétriques.

On a $\overrightarrow{u}:\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$, et $\quad\Gamma:\quad\begin{cases}x(t)\\ y(t) & t\in\mathrm{I}\\ z(t)\end{cases}$

$$\mathrm{M}:\begin{pmatrix}\mathrm{X}\\ \mathrm{Y}\\ \mathrm{Z}\end{pmatrix}\in\Sigma\Leftrightarrow\begin{cases}\exists\,\lambda\in\mathbb{R}\\ \exists\,t\in\mathrm{I}\end{cases}\quad\begin{cases}x(t)=\mathrm{X}+\lambda\alpha\\ y(t)=\mathrm{Y}+\lambda\beta\\ z(t)=\mathrm{Z}+\lambda\gamma\end{cases}$$

On a directement une représentation de Σ en nappe paramétrée. Pour obtenir une équation cartésienne, on élimine λ et t entre ces deux équations, on obtient l'équation d'un cylindre Σ' qui contient le cylindre cherché.

- Si Γ est définie par intersection de surfaces.

On a $\overrightarrow{u}:\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$, $\quad$ et $\Gamma:\quad\begin{cases}\mathrm{F}(x,y,z)=0\\ \mathrm{G}(x,y,z)=0\end{cases}$

$$\mathrm{M}:\begin{pmatrix}\mathrm{X}\\ \mathrm{Y}\\ \mathrm{Z}\end{pmatrix}\in\Sigma\Leftrightarrow\exists\,\lambda\in\mathbb{R},\quad\begin{cases}\mathrm{F}(\mathrm{X}+\lambda\alpha,\mathrm{Y}+\lambda\beta,\mathrm{Z}+\lambda\gamma)=0\\ \mathrm{G}(\mathrm{X}+\lambda\alpha,\mathrm{Y}+\lambda\beta,\mathrm{Z}+\lambda\gamma)=0\end{cases}$$

On élimine le paramètre λ, on obtient l'équation d'un cylindre Σ' qui contient Σ le cylindre cherché.

> Dans le cas où Γ est définie en paramétriques $\Gamma:\begin{cases}x(t)\\ y(t) & t\in\mathrm{I}\\ z(t)\end{cases}$, on peut aussi paramétrer la droite de direction $\overrightarrow{u}:\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ passant par un point de Γ, on obtient :
>
> $$\mathrm{M}:\begin{pmatrix}\mathrm{X}\\ \mathrm{Y}\\ \mathrm{Z}\end{pmatrix}\in\Sigma\Leftrightarrow\begin{cases}\exists\,\lambda\in\mathbb{R}\\ \exists\,t\in\mathrm{I}\end{cases}\begin{cases}\mathrm{X}=x(t)+\lambda\alpha\\ \mathrm{Y}=y(t)+\lambda\beta\\ \mathrm{Z}=z(t)+\lambda\gamma\end{cases}$$
>
> Par rapport à la méthode précédente, cela revient à changer λ et $-\lambda$. On a encore directement une représentation en nappe paramétrée.

Exemple : On cherche une équation cartésienne du cylindre Σ de direction $\overrightarrow{u}:\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ et de directrice définie par $t\in\mathbb{R}:\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\\ z=t\end{cases}$.

On a donc $\mathrm{M}:\begin{pmatrix}\mathrm{X}\\ \mathrm{Y}\\ \mathrm{Z}\end{pmatrix}\in\Sigma\Leftrightarrow\exists\,\lambda,t\in\mathbb{R}:\begin{cases}\cos t=\mathrm{X}+\lambda\\ \sin t=\mathrm{Y}+\lambda\\ t=\mathrm{Z}\end{cases}$.

On élimine facilement t, ce qui donne $\begin{cases} \cos Z = X + \lambda \\ \sin Z = Y + \lambda \end{cases}$.
Tout aussi facilement, on élimine λ, et on obtient enfin : $\cos Z - \sin Z = X - Y$ qui est l'équation d'un cylindre Σ' qui contient le cylindre cherché.

1.5. Recherche du contour apparent

On cherche le contour apparent de la surface $\mathscr{S}$ d'équation $F(x,y,z) = 0$ dans la direction $\overrightarrow{u} : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

Pour cela, on prend un point M de la surface $\mathscr{S}$, et on écrit que le gradient de F en ce point est normal à $\overrightarrow{u}$.
Cela donne :

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= 0 \\ \alpha\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) + \beta\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) + \gamma\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

On a ainsi le contour apparent par intersection de surfaces.

> Si on peut, il faut absolument simplifier, au maximum et dès que possible, les équations intervenant dans la recherche de ce contour apparent.

La figure 3, ci-dessous, illustre cette recherche.

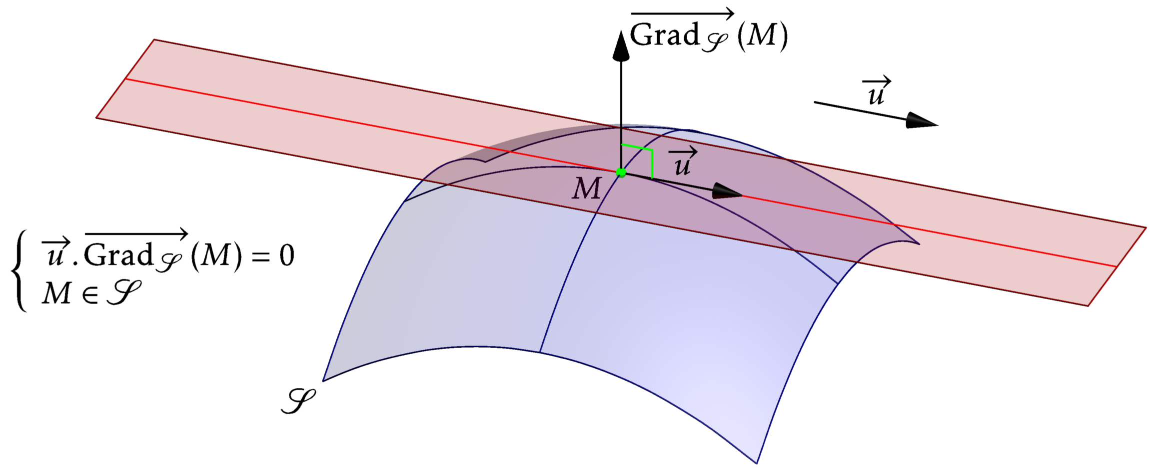

Figure 3 – **Le plan tangent à $\mathscr{S}$ en M contient la direction $\overrightarrow{u}$**

1.6. Équation d'un cylindre circonscrit à une surface

Il suffit de chercher le contour apparent, puis de chercher le cylindre de la direction donnée et de directrice ce contour apparent.

Exemple : On cherche une équation cartésienne du cylindre Σ de direction $\overrightarrow{u} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ circonscrit à $\mathscr{S}$ d'équation : $x^2 + y^2 - z = 0$.

Le contour apparent est donné comme on vient de le voir par : $\begin{cases} x^2+y^2-z=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases}$.

On a donc $M:\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Sigma \Leftrightarrow \exists\,\lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} (X+\lambda)^2+(Y+\lambda)^2-Z=0 \\ 2\,(X+\lambda)+2\,(Y+\lambda)=0 \end{cases}$.

On élimine λ en récrivant la deuxième équation, $\lambda=-\dfrac{X+Y}{2}$, et on obtient : $\left(\dfrac{X-Y}{2}\right)^2+\left(\dfrac{Y-X}{2}\right)^2-Z=0$ ou encore $(X-Y)^2-2Z=0$ qui est l'équation d'un cylindre Σ' qui contient le cylindre cherché.

2. Cônes

2.1. Cône

Définition : Une **cône de sommet** Ω est formée d'une famille de droites passant par Ω.
Ces droites sont les **génératrices** du cône.
Une courbe qui rencontre toutes les génératrices est une **directrice**.

On peut voir sur figure 4, ci-dessous, deux exemples de cônes, au sens mathématique du terme !

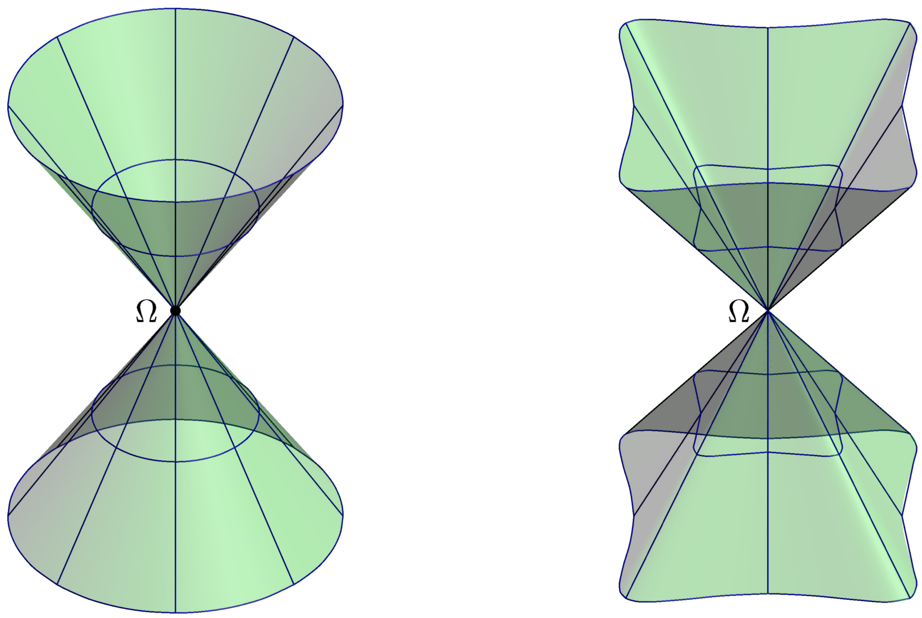

Figure 4 – **Exemples de cônes**

Un cône n'est pas, en général, un cône de révolution !

Définition : Si $\mathscr{S}$ est une surface, l'ensemble des points M de $\mathscr{S}$ tels que le plan tangent à $\mathscr{S}$ en M contient Ω est le **contour apparent** de $\mathscr{S}$ vu de Ω.
Le cône de sommet Ω et de directrice ce contour apparent est le **cône circonscrit** à $\mathscr{S}$ vu de Ω.

2.2. Équation polynomiale d'un cône de sommet O

Théorème : Une surface dont l'équation cartésienne est un polynôme en x, y, z est un cône de sommet O si et seulement si tous les monômes sont de même degré (en degré cumulé en x, y, z).

Démonstration : $\mathscr{S}$ d'équation $F(x, y, z) = 0$, alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = 0$, ce qui prouve que F est de degré homogène en x, y, z. ■

2.3. Plan tangent le long d'une génératrice

Théorème : Le plan tangent à un cône, le long d'une génératrice, sauf au sommet, est invariant.

Démonstration : Quitte à changer de repère, on prend un cône de sommet O.

On a une directrice $\Gamma : \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}, t \in I$, le cône en paramétrique est donc : $\begin{cases} X = \lambda\, x(t) \\ Y = \lambda\, y(t) \\ Z = \lambda\, z(t) \end{cases}, t \in I, \lambda \in \mathbb{R}$.

Le plan tangent le long de cette génératrice (si seul λ varie) est donc normal à : $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \lambda\, x'(t) \\ \lambda\, y'(t) \\ \lambda\, z'(t) \end{pmatrix}$

comme $\lambda \neq 0$, normal à : $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ qui ne contient plus λ.

Comme de plus, tous ces plans tangents contiennent cette génératrice, ils sont confondus. ■

2.4. Équation d'un cône de sommet et directrice donnés

On va chercher l'équation d'un cône Σ de sommet Ω et de directrice Γ donnés.

- Faire une figure symbolique comme la figure 5, page suivante.
- Partir d'un point **quelconque** du cône Σ^* cherché $M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$.

  (Σ^* est le cône épointé, c'est à dire privé de son sommet Ω).
- Ecrire que la droite (décrite en paramétrique) (ΩM) rencontre Γ : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega M} \in \Gamma$

  Pour cela, on a en pratique deux cas selon que Γ est donné en paramétriques ou par intersection de surfaces.
  - Si Γ est donné en paramétriques.

    On a $\Omega : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, et $\Gamma : \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} t \in I$

    $$M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Sigma^* \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R} \\ \exists t \in I \end{cases} \begin{cases} x(t) = a + \lambda(X - a) \\ y(t) = b + \lambda(Y - b) \\ z(t) = c + \lambda(Z - c) \end{cases}$$

    On a pratiquement directement une représentation en nappe paramétrée de Σ, pour obtenir une équation cartésienne, on élimine λ et t entre ces deux équations, on obtient l'équation d'un cône Σ' qui contient le cône cherché. Vérifier que $\Omega \in \Sigma'$.

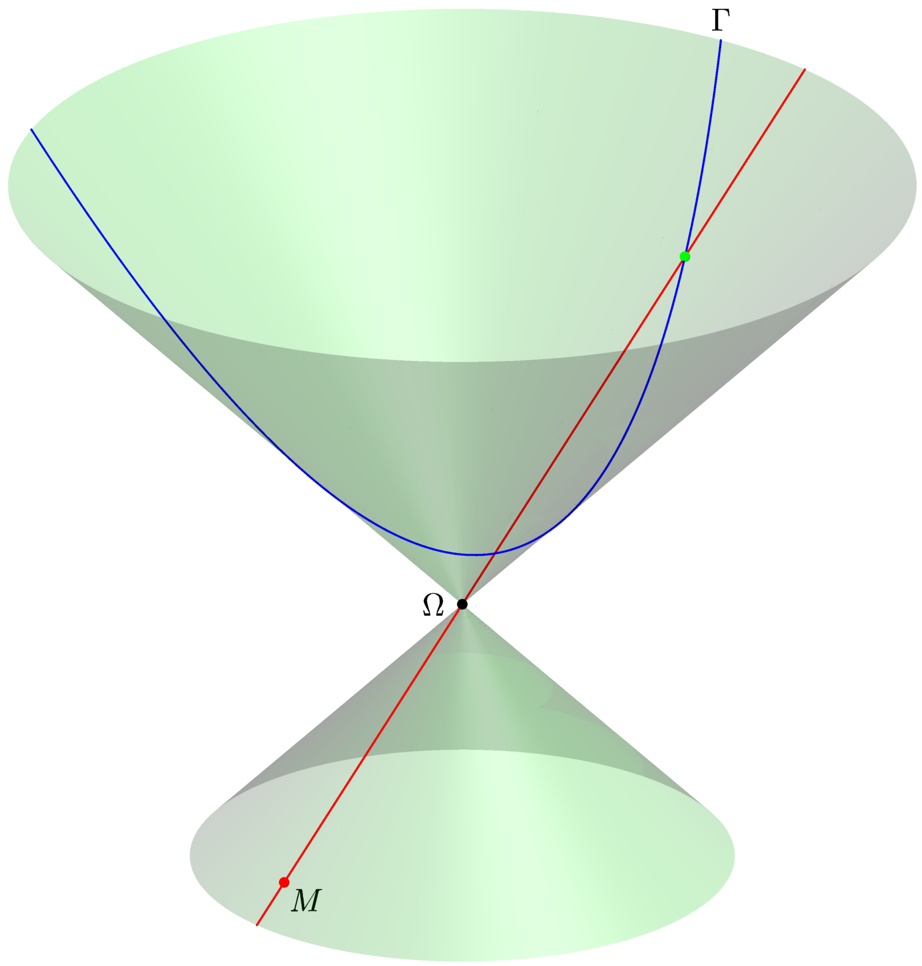

Figure 5 – **Cône : sommet et directrice**

- Si Γ est donné par intersection de surfaces.

  On a $\Omega : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, et Γ : $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$

$$M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Sigma^* \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} F(a+\lambda(X-a), b+\lambda(Y-b), c+\lambda(Z-c)) = 0 \\ G(a+\lambda(X-a), b+\lambda(Y-b), c+\lambda(Z-c)) = 0 \end{cases}$$

On élimine le paramètre λ, on obtient l'équation d'un cône Σ' qui contient Σ le cône cherché.
Il reste à vérifier que $\Omega \in \Sigma'$.

Dans le cas où Γ est définie en paramétriques $\Gamma : \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$ $t \in \mathrm{I}$, on peut aussi paramétrer la droite de direction passant par un point de Γ et Ω, on obtient :

$$\mathrm{M} : \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix} \in \Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R} \\ \exists t \in \mathrm{I} \end{cases} \begin{cases} \mathrm{X} = a + \lambda (x(t) - a) \\ \mathrm{Y} = b + \lambda (y(t) - b) \\ \mathrm{Z} = c + \lambda (z(t) - c) \end{cases}$$

Par rapport à la méthode précédente, cela revient à changer λ et $\dfrac{1}{\lambda}$.
On a encore directement une représentation en nappe paramétrée.

Exemple : On cherche une équation cartésienne du cône Σ de sommet $\Omega : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de directrice définie par $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$.

On a donc $\mathrm{M} : \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix} \in \Sigma^* \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} (1 + \lambda(\mathrm{X}-1))^2 + (1 + \lambda(\mathrm{Y}-1))^2 + (\lambda \mathrm{Z})^2 = 4 \\ (1 + \lambda(\mathrm{X}-1)) + (1 + \lambda(\mathrm{Y}-1)) + (\lambda \mathrm{Z}) = 1 \end{cases}$.

On réécrit ce système : $\begin{cases} \lambda^2 \left((\mathrm{X}-1)^2 + (\mathrm{Y}-1)^2 + \mathrm{Z}^2\right) + 2\lambda((\mathrm{X}-1) + (\mathrm{Y}-1)) = 2 \\ \lambda((\mathrm{X}-1) + (\mathrm{Y}-1) + \mathrm{Z}) = -1 \end{cases}$.

On multiplie la première équation par $((\mathrm{X}-1) + (\mathrm{Y}-1) + \mathrm{Z})^2$
et on remplace $\lambda((\mathrm{X}-1) + (\mathrm{Y}-1) + \mathrm{Z})$ par -1.
On obtient $\left((\mathrm{X}-1)^2 + (\mathrm{Y}-1)^2 + \mathrm{Z}^2\right) - 2((\mathrm{X}-1) + (\mathrm{Y}-1) + \mathrm{Z})((\mathrm{X}-1) + (\mathrm{Y}-1)) = 2$.
Ceci est l'équation d'un cône Σ' qui contient le cône cherché.

2.5. Recherche du contour apparent

On cherche le contour apparent de la surface $\mathscr{S}$ d'équation $\mathrm{F}(x, y, z) = 0$ vu du point $\Omega : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Pour cela, on écrit que le gradient de F en un point M de $\mathscr{S}$ est normal au vecteur $\overrightarrow{\Omega \mathrm{M}}$.
Le contour apparent est donc donné par intersection de surfaces :

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(x, y, z) &= 0 \\ (x-a)\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(x, y, z) + (y-b)\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}(x, y, z) + (z-c)\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}(x, y, z) &= 0 \end{aligned}$$

Si on peut, il faut absolument simplifier, au maximum et dès que possible, les équations intervenant dans la recherche de ce contour apparent.

La figure 6, page suivante, illustre cette recherche.

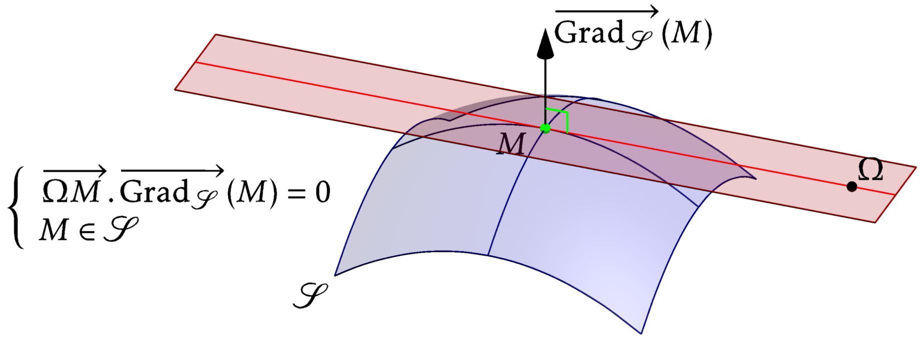

Figure 6 – **Le plan tangent à $\mathscr{S}$ en M contient Ω**

2.6. Équation d'un cône circonscrit à une surface

Il suffit de rechercher le contour apparent, puis de rechercher le cône de sommet donné et de directrice ce contour apparent.

Exemple : On cherche une équation cartésienne du cône Σ de sommet $\Omega : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et circonscrit à la surface $\mathscr{S}$ définie par $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Le contour apparent est donné par : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x(x-1) + 2y(y-2) + 2z^2 = 0 \end{cases}$.

On récrit ce système : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 1 - x - 2y = 0 \end{cases}$.

On a donc $\mathrm{M} : \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix} \in \Sigma^* \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} (1 + \lambda(\mathrm{X}-1))^2 + (2 + \lambda(\mathrm{Y}-2))^2 + (\lambda \mathrm{Z})^2 = 1 \\ 1 - (1 + \lambda(\mathrm{X}-1)) - 2(2 + \lambda(\mathrm{Y}-2)) = 0 \end{cases}$.

Système qu'on récrit : $\begin{cases} \lambda^2\left((\mathrm{X}-1)^2 + (\mathrm{Y}-2)^2 + \mathrm{Z}^2\right) + 2\lambda((\mathrm{X}-1) + 2(\mathrm{Y}-2)) + 4 = 0 \\ \lambda((\mathrm{X}-1) + 2(\mathrm{Y}-2)) = -4 \end{cases}$.

On multiplie la première par $((\mathrm{X}-1) + 2(\mathrm{Y}-2))^2$ et on remplace $\lambda((\mathrm{X}-1) + 2(\mathrm{Y}-2))$ par -4.
Ceci donne, après simplification par -4 :
$((\mathrm{X}-1) + 2(\mathrm{Y}-2))^2 + 4\left((\mathrm{X}-1)^2 + (\mathrm{Y}-2)^2 + \mathrm{Z}^2\right) + 2(-(\mathrm{X}-1) - 2(\mathrm{Y}-2))((\mathrm{X}-1) + 2(\mathrm{Y}-2)) = 0.$
Ou encore : $-((\mathrm{X}-1) + 2(\mathrm{Y}-2))^2 + 4\left((\mathrm{X}-1)^2 + (\mathrm{Y}-2)^2 + \mathrm{Z}^2\right) = 0.$
Ceci est l'équation d'un cône Σ' qui contient le cône cherché.

3. Surfaces de Révolution

3.1. Surface de révolution d'axe Δ

Définition : Δ une droite de l'espace.

Un cercle de l'espace est d'axe $\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} \text{son centre appartient à } \Delta \\ \text{il est tracé dans un plan orthogonal à } \Delta \end{cases}$

Définition : Une **surface de révolution d'axe** Δ est formée d'une famille de cercles d'axe Δ. Ces cercles d'axe Δ sont les **parallèles** de la surface.

Un plan contenant l'axe de révolution est un **plan méridien**, son intersection avec la surface est une **méridienne.**
La méridienne est symétrique par rapport à l'axe de révolution. On parle donc parfois de demi-méridienne.
Une surface de révolution est donc engendrée par la rotation d'une méridienne, ou d'une demi-méridienne, autour de l'axe de révolution.

3.2. Équation cartésienne d'une surface de révolution d'axe Δ

Théorème : Une surface est de révolution d'axe $Oz \Leftrightarrow$ elle a une équation de la forme

$$F(x^2+y^2,z)=0$$

Démonstration : xOz est un plan méridien. La méridienne est symétrique par rapport à Oz.
Elle est donc d'équation $F(x^2,z)=0$. L'équation en coordonnées cylindriques est donc $F(\rho^2,z)=0$. On obtient donc en coordonnées cartésiennes $F(x^2+y^2,z)=0$. ■

Théorème : Une surface de révolution Σ d'axe Δ a une équation de la forme : $F(S,P)=0$

avec $\begin{cases} S(x,y,z)=R^2 & \text{l'équation d'une sphère et,} \\ P(x,y,z)=k & \text{l'équation d'un plan.} \end{cases}$

L'axe de révolution Δ est orthogonal à P et passe par le centre de S.

Démonstration : Dans un repère orthonormal centré sur $\Omega\in\Delta$, tel que $\overrightarrow{K}$ est dans la direction de Δ, Σ a une équation de la forme : $F_1\left(X^2+Y^2,Z\right)=0$ Ou encore : $F\left(X^2+Y^2+Z^2,Z\right)=0$
Or, en utilisant le produit scalaire et la norme : $\overrightarrow{K}=\alpha\,\overrightarrow{\imath}+\beta\,\overrightarrow{\jmath}+\gamma\,\overrightarrow{k}$
On obtient : $Z=\alpha(x-a)+\beta(y-b)+\gamma(z-c)$ et $X^2+Y^2+Z^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$
Ce qui donne le résultat. ■

3.3. Équation d'une surface de révolution engendrée par la rotation d'une demi-méridienne autour de Oz

Il s'agit de rechercher l'équation d'une surface de révolution d'axe $0z$ dont on connaît une demi-méridienne ou une méridienne.
Si on a une demi-méridienne dans le plan xOz, elle est d'équation : $f(x,z)=0$
En complétant par symétrie, la méridienne complète est d'équation : $f(x,z)\,f(-x,z)=0$
Ce qu'on réécrit : $F\left(x^2,z\right)=0$
Alors la surface de révolution est simplement d'équation : $F\left(x^2+y^2,z\right)=0$
Pour cela, on utilise simplement les coordonnées cylindriques.

Exemple : On va chercher l'équation du tore de révolution engendré par la rotation du cercle du plan xOz d'équation $(x-2)^2+z^2=1$ autour de Oz.
Ce cercle est une demi-méridienne, l'autre demi-méridienne est d'équation $(x-2)^2+z^2=1$, et donc la méridienne : $\left((x-2)^2+z^2-1\right)\left((x+2)^2+z^2-1\right)=0$.
Ce qu'on récrit : $\left(x^2-4\right)^2+2\left(z^2-1\right)\left(x^2+4\right)+\left(z^2-1\right)^2=0$. Il suffit alors de remplacer x^2 par x^2+y^2 et on obtient : $\left(x^2+y^2-4\right)^2+2\left(z^2-1\right)\left(x^2+y^2+4\right)+\left(z^2-1\right)^2=0$.

3.4. Équation d'une surface engendrée par la rotation de Γ autour de Δ

On recherche ici l'équation d'une surface de révolution Σ engendrée par la rotation de Γ autour de Δ. on traite ici le cas général.

- Faire une figure symbolique comme la figure 7, ci-dessous.

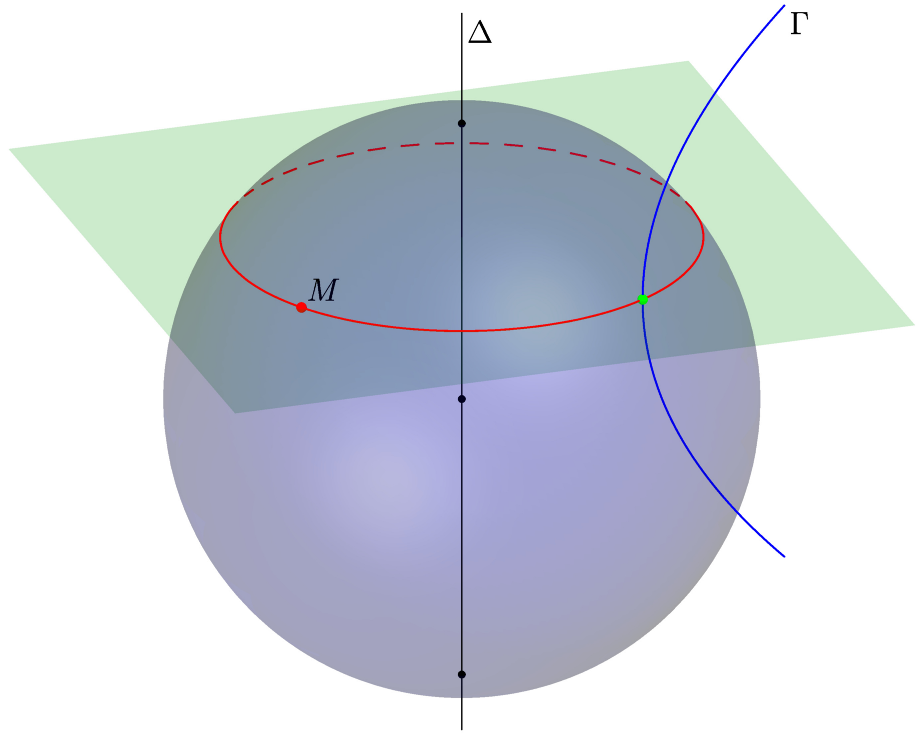

Figure 7 – **Surface de révolution**

- Partir d'un point **quelconque** de la surface Σ cherchée $\mathrm{M} : \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix}$
- Écrire qu'un point de Γ appartient au cercle d'axe Δ passant par M.
  Ce qui revient à écrire qu'un point de Γ appartient à la fois,
  - à la sphère centrée sur un point arbitraire de Δ (choisi le plus simple possible) passant par M et
  - au plan perpendiculaire à Δ passant par M.

  Pour cela, on a en pratique deux cas selon que Γ est donné en paramétriques ou par intersection de surfaces.
  - Si Γ est définie en paramétriques.

    $\Delta = \left(\Omega, \overrightarrow{u}\right)$ avec $\Omega : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u} : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et enfin $\Gamma : \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} \quad t \in \mathrm{I}$

    $$\mathrm{M} \in \Sigma \Leftrightarrow \exists\, t \in \mathrm{I}, \begin{cases} \alpha x(t) + \beta y(t) + \gamma z(t) = \alpha \mathrm{X} + \beta \mathrm{Y} + \gamma \mathrm{Z} \\ (x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2 + (z(t) - c)^2 \\ \qquad = (\mathrm{X} - a)^2 + (\mathrm{Y} - b)^2 + (\mathrm{Z} - c)^2 \end{cases}$$

    On élimine le paramètre, on obtient l'équation d'une surface Σ' de révolution qui contient Σ la surface cherchée.
  - Si Γ est définie par intersection de surfaces.

$\Delta = \left(\Omega, \overrightarrow{u}\right)$ avec $\Omega : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u} : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et enfin $\Gamma : \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$

$$M \in \Sigma \Leftrightarrow \exists\, x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}, \begin{cases} F(x_0,y_0,z_0) = 0 \\ G(x_0,y_0,z_0) = 0 \\ \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 = \alpha X + \beta Y + \gamma Z \\ (x_0-a)^2 + (y_0-b)^2 + (z_0-c)^2 \\ \qquad = (X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2 \end{cases}$$

On élimine les paramètres, on obtient l'équation d'une surface Σ' de révolution qui contient Σ la surface cherchée.

Exemple : On va chercher l'équation de la surface de révolution Σ engendrée par la rotation de la courbe $\Gamma : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = 1 + t \end{cases}$ autour de l'axe Δ passant par O et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit $M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ appartenant à la surface, Le cercle d'axe Δ passant par M, le plan passant par M et perpendiculaire à Δ, et Γ ont un point commun. Ce qui donne, compte tenu qu'on remplace le cercle par la sphère de centre O passant par $M : \exists\, t \in \mathbb{R} : \begin{cases} t^2 + t^4 + (1+t)^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \\ t + t^2 = X + Y \end{cases}$.

On sort $t^2 = X + Y - t$ de la seconde équation, on le plonge dans la première,
ce qui donne : $1 + 2t + 2(X+Y-t) + (X+Y-t)^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$
puis $1 + 2(X+Y) + (X+Y)^2 - 2t(X+Y) = X^2 + Y^2 + Z^2$.

On a ainsi : $\begin{cases} 2t(X+Y) = 1 + 2(X+Y) + (X+Y)^2 - \left(X^2+Y^2+Z^2\right) \\ t + t^2 = X + Y \end{cases}$.

On multiplie la deuxième par $4(X+Y)^2$ et on remplace en utilisant la première :

$$2(X+Y)\left(1 + 2(X+Y) + (X+Y)^2 - \left(X^2+Y^2+Z^2\right)\right) + \left(1 + 2(X+Y) + (X+Y)^2 - \left(X^2+Y^2+Z^2\right)\right)^2 = X + Y.$$

On obtient l'équation d'une surface qui contient la surface de révolution cherchée.

4. Cylindres et cônes de révolution

> On ne cherche pas l'équation d'un cylindre ou d'un cône de révolution comme celle d'un cylindre ou d'un cône ni comme celle d'une surface de révolution !...

4.1. Cylindre de révolution

Pour un cylindre de révolution défini par son axe $D : \left(A, \overrightarrow{u}\right)$ et son rayon R

On cherche l'ensemble des points M tels que la distance de M à D vaut R : $\dfrac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\right\|}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|} = R$

Si, au lieu d'avoir le rayon du cylindre, on a un point M_0 de ce cylindre,

on écrit alors : $\dfrac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\right\|}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|} = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AM_0} \wedge \overrightarrow{u}\right\|}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|}$ qui se simplifie : $\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{AM_0} \wedge \overrightarrow{u}\right\|$

En pratique, dans tous les cas, on élève tout au carré pour avoir une égalité équivalente sans racines carrées.

4.2. Cône de révolution

Pour un cône de révolution défini par son axe D dirigé par $\overrightarrow{u}$, son sommet Ω et son demi angle au sommet θ

On cherche l'ensemble des points M tels que l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\Omega M}}\right)$ a pour mesure θ en tant qu'angle non orienté de droites, c'est à dire : $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\Omega M}}\right) = \pm\theta_{[\pi]}$

ou encore : $\left|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\Omega M}}\right)\right| = |\cos\theta| \Leftrightarrow \dfrac{\left|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\Omega M}\right|}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|} = |\cos\theta|$

Si, au lieu d'avoir le demi-angle au sommet θ, on a un point M_0 du cône,

on écrit alors : $\dfrac{\left|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\Omega M}\right|}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|} = \dfrac{\left|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\Omega M_0}\right|}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|\left\|\overrightarrow{\Omega M_0}\right\|}$ qui se simplifie : $\dfrac{\left|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\Omega M}\right|}{\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|} = \dfrac{\left|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\Omega M_0}\right|}{\left\|\overrightarrow{\Omega M_0}\right\|}$

En pratique, dans tous les cas, on élève tout au carré pour éviter les valeurs absolues et les racines carrées.

5. Quadriques

5.1. Quadriques propres ou dégénérées

Définition : Une quadrique est une surface dont l'équation est un polynôme du second degré en x, y, z.

Les quadriques sont en quelque sorte à l'espace ce que les coniques sont au plan.
Certaines quadriques sont dites dégénérées. Ainsi, une « quadrique » peut être :

- vide, par exemple : $x^2+y^2+z^2=-1$
- un point, par exemple : $x^2+y^2+z^2=0$
- une droite, par exemple : $x^2+y^2=0$
- un plan, par exemple : $x^2=0$
- deux plans, par exemple : $xy=0$ ou $x^2-y^2=0$ ou $x^2=1$

D'autres quadriques ne sont que des cas particuliers de surfaces déjà étudiées, ce sont :

- des cylindres à base :
  - elliptique, dont certains de révolution, par exemple : $x^2+y^2=1$ ou $x^2+2y^2=1$
  - parabolique, par exemple : $y=x^2$, ou
  - hyperbolique, par exemple : $x^2-y^2=1$
- des cônes du second degré, dont certains de révolution, par exemple : $x^2+y^2-z^2=0$.

Les autres quadriques sont les quadriques dites propres, objet réel de ce chapitre.

5.2. Intersection avec un plan

Théorème :
L'intersection d'une quadrique, dégénérée ou non, avec un plan est une conique, dégénérée ou non.

> Attention , l'intersection d'une quadrique propre avec un plan peut être une conique dégénérée...

Démonstration : Un changement de repère, orthonormal ou non, transforme une équation du second degré en une équation du second degré.
On peut donc supposer que le plan est d'équation $\mathscr{P} : z = 0$.

$$\mathcal{Q} : ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

a pour intersection avec $\mathscr{P}$:

$$\mathscr{C} : ax^2 + by^2 + 2dxy + gx + hy + j = 0$$

On a bien l'équation générale d'une conique. ■

5.3. Quadriques de révolution

L'intersection d'une quadrique avec un plan étant une conique, l'intersection d'une quadrique de révolution d'axe Δ avec un plan méridien est une conique dont Δ est axe de symétrie...
Une quadrique de révolution est donc engendrée par la rotation d'une conique autour d'un de ses axes de symétrie.
Certaines quadriques quadriques ainsi obtenues sont des cylindres et des cônes de révolution.
Mais certaines quadriques sont de « nouvelles » surfaces, quadriques dites propres.
On va ainsi trouver :

- Le paraboloïde de révolution, obtenu en faisant tourner une parabole autour de son axe.
- L'ellipsoïde de révolution, obtenu en faisant tourner une ellipse autour d'un de ses axes.
  Il sera en forme de « ballon de rugby » si l'axe de révolution est l'axe focal de l'ellipse et en forme de « soucoupe » si l'axe de révolution est l'axe non focal de l'ellipse.
- L'hyperboloïde de révolution à une nappe, obtenu en faisant tourner une hyperbole autour de son axe non focal.
- L'hyperboloïde de révolution à deux nappes, obtenu en faisant tourner une hyperbole autour de son axe focal.

5.4. Équations réduites des quadriques propres

Définition : Il y a 5 types de quadriques propres :

- Le paraboloïde elliptique (PE) d'équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{2z}{c}$, $\quad a > 0,\ b > 0,\ c \neq 0$
  Si $a = b$, il est de révolution d'axe Oz.
- Le paraboloïde hyperbolique (PH) d'équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{2z}{c}$, $\quad a > 0,\ b > 0,\ c \neq 0$
  Il n'est jamais de révolution.
- L'ellipsoïde (E) d'équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $\quad a > 0,\ b > 0,\ c > 0$
  Si $a = b$, il est de révolution d'axe Oz.
- L'hyperboloïde à une nappe (H1) d'équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $\quad a > 0,\ b > 0,\ c > 0$
  Si $a = b$, il est de révolution d'axe Oz.
- L'hyperboloïde à deux nappes (H2) d'équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$, $\quad a > 0,\ b > 0,\ c > 0$
  Si $a = b$, il est de révolution d'axe Oz.

On verra plus loin qu'on peut toujours faire un changement de repère orthonormal tel que dans ce repère l'équation d'une quadrique donnée est réduite.
Toutes, sauf le paraboloïde hyperbolique possèdent une « version » de révolution. On a ainsi facilement une description géométrique de ces quadriques en dilatant selon un ou deux axes la quadrique de révolution correspondante.

5.5. L'Ellipsoïde (E)

Équation réduite centrée : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ avec $a>0$ $b>0$ $c>0$

Si $a=b$ il est de révolution d'axe $0z$. Il est alors obtenu en faisant tourner une ellipse autour d'un de ses axes de symétrie.
L'intersection avec le plan tangent est réduite à un point. Il ne contient pas de droites. Tout point est en ballon.
L'origine est centre de symétrie.
Il est formé d'ellipses.
On obtient un paramétrage classique en s'inspirant des coordonnées sphériques :

$$\theta\in[0,2\pi],\quad \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]:\quad \begin{cases} x=a\cos\varphi\cos\theta\\ y=b\cos\varphi\sin\theta\\ z=c\sin\varphi\end{cases}$$

L'ellipsoïde est représenté figure 8, ci-dessous.

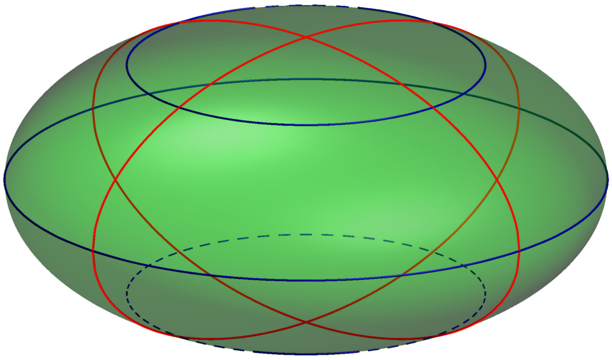

Figure 8 – **Ellipsoïde**

5.6. Le paraboloïde elliptique (PE)

Équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2pz$ avec $a>0$ $b>0$

Si $a=b$ il est de révolution d'axe $0z$, alors obtenu en faisant tourner une parabole autour de son axe de symétrie.
Il est formé de paraboles (intersection avec un plan vertical) et d'ellipses.
L'intersection avec le plan tangent est réduite à un point. Tout point est en ballon. Il ne contient pas de droites.
Il n'y a pas non plus de centre de symétrie.
On obtient un paramétrage classique en s'inspirant des coordonnées cylindriques :

$$t\in\mathbb{R}^+,\quad \theta\in[0,2\pi]:\quad \begin{cases} x=a\ t\cos\theta\\ y=b\ t\sin\theta\\ z=\dfrac{t^2}{2p}\end{cases}$$

Le paraboloïde elliptique est représenté figure 9, page ci-contre.

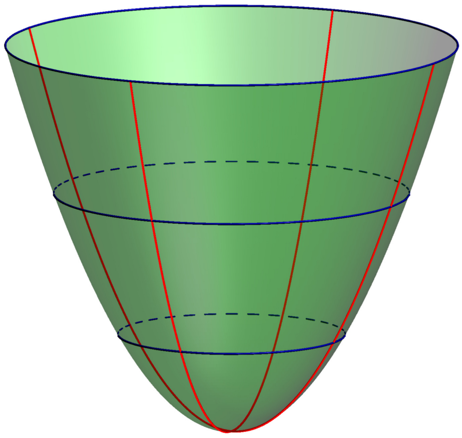

Figure 9 – **Paraboloïde Elliptique**

5.7. Le paraboloïde hyperbolique (PH)

Équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2pz \quad \text{avec} \quad a > 0 \quad b > 0$

Il n'est jamais de révolution, mais contient deux familles de droites obtenues en factorisant

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$$

Ce qui donne : $\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \dfrac{x_0}{a} - \dfrac{y_0}{b} \\ \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right)\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{y_0}{b}\right) = 2pz \end{cases}$ et $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \dfrac{x_0}{a} + \dfrac{y_0}{b} \\ \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right)\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{y_0}{b}\right) = 2pz \end{cases}$

Pour un point donné M_0 de ce paraboloïde, on obtient ainsi, en général, les deux droites tracées sur ce paraboloïde et qui passent par ce point. Elles sont alors définies par intersection de plans.
L'intersection avec le plan tangent est formée de 2 droites. Par tout point, il passe deux droites distinctes tracées sur la surface, intersection avec le plan tangent à ce point. Tout point est en col.
Il n'a pas de centre de symétrie.
Il est formé d'hyperboles et de paraboles.
On obtient un paramétrage classique en s'inspirant des coordonnées cylindriques associées à de la trigonométrie hyperbolique : $t \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \mathbb{R} :$ $\begin{cases} x = a\,t\,\mathrm{ch}\,\theta \\ y = b\,t\,\mathrm{sh}\,\theta \\ z = \dfrac{t^2}{2p} \end{cases}$ pour $\left|\dfrac{x}{a}\right| > \left|\dfrac{y}{b}\right|$

On inverse ch et sh et le signe de z pour $\left|\dfrac{x}{a}\right| < \left|\dfrac{y}{b}\right|$
Le paraboloïde hyperbolique est représenté figure 10, page suivante.
Le paraboloïde hyperbolique est aussi représenté figure 11, page suivante, où l'on voit les familles de droites tracées dessus.

5.8. L'hyperboloïde à une nappe (H1)

Équation réduite centrée : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{avec} \quad a > 0 \quad b > 0 \quad c > 0$

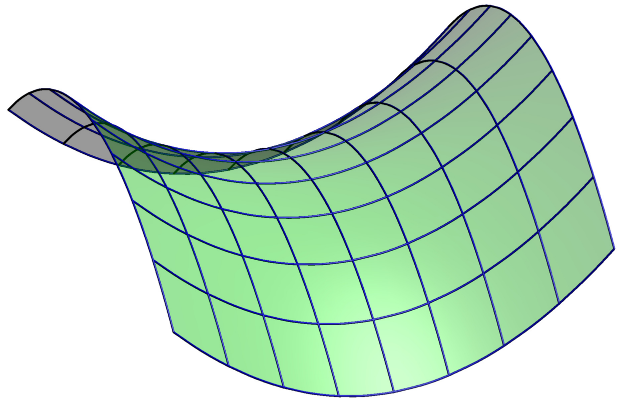

Figure 10 – **Paraboloïde Hyperbolique**

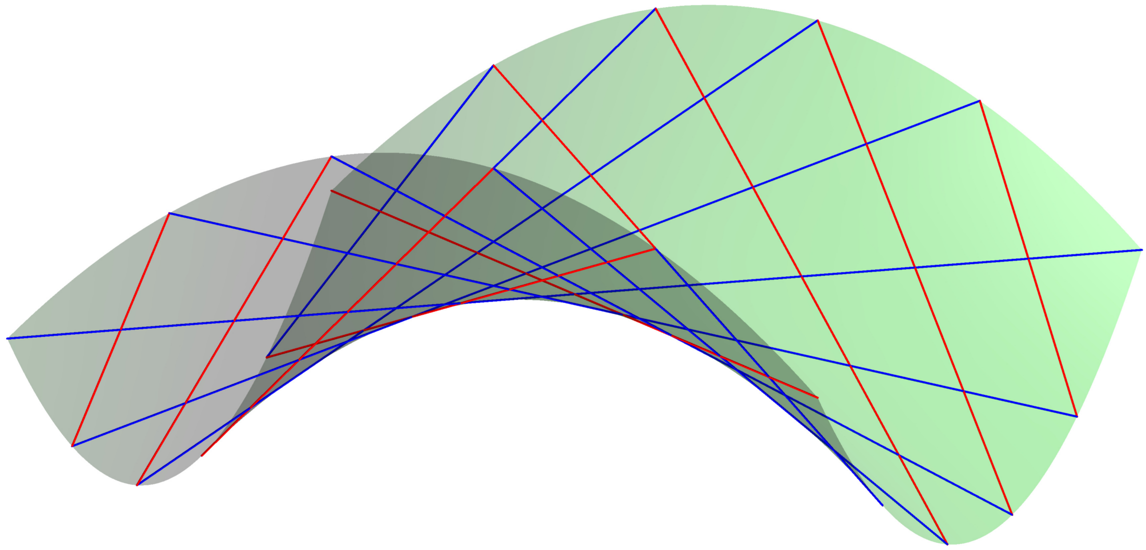

Figure 11 – **Droites sur un Paraboloïde Hyperbolique**

Si $a = b$ il est de révolution d'axe $0z$, alors obtenu en faisant tourner une hyperbole autour de son axe de symétrie non focal.

Le **cône asymptote** est d'équation : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$

Il contient deux familles de droites obtenues en factorisant $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2}$ et $1 - \dfrac{y^2}{b^2}$ comme différences de 2 carrés :

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

Ce qui donne :

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c}\right) = \left(1 + \dfrac{y_0}{b}\right)\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \\ \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c}\right) = \left(1 - \dfrac{y_0}{b}\right)\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c}\right) = \left(1 - \dfrac{y_0}{b}\right)\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \\ \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c}\right) = \left(1 + \dfrac{y_0}{b}\right)\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \end{array}\right.$$

Pour un point M_0 donné de cet hyperboloïde, on obtient ainsi, en général, les deux droites tracées sur cet hyperboloïde qui passent par ce point. elles sont alors définies par intersection de plans.

L'intersection avec le plan tangent est formée de 2 droites. Par tout point, il passe deux droites distinctes tracées sur la surface, intersection avec le plan tangent à ce point. Tout point est un point col.
L'origine est centre de symétrie.
Il est formé d'ellipses, de paraboles et d'hyperboles.
On obtient un paramétrage classique en s'inspirant des coordonnées sphériques, et en utilisant de la trigonométrie hyperbolique : $\varphi \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 2\pi]$: $\begin{cases} x = a \operatorname{ch} \varphi \cos \theta \\ y = b \operatorname{ch} \varphi \sin \theta \\ z = c \operatorname{sh} \varphi \end{cases}$
L'hyperboloïde à une nappe est représenté figure 12, ci-dessous.

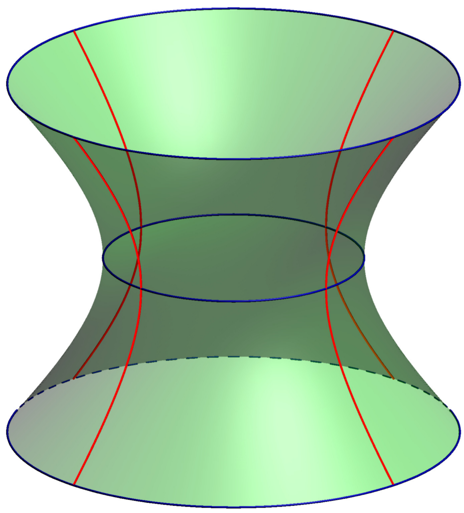

Figure 12 – **Hyperboloïde à 1 nappe**

L'hyperboloïde à une nappe est aussi représenté figure 13, page suivante, présenté ici avec une des familles de droites tracées dessus.

5.9. L'hyperboloïde à 2 nappes (H2)

Équation réduite centrée : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ avec $a > 0$ $b > 0$ $c > 0$

Si $a = b$ il est de révolution d'axe $0z$, alors obtenu en faisant tourner une hyperbole autour de son axe focal.
Le **cône asymptote** est d'équation : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$
L'intersection avec le plan tangent est réduite à un point. H2 ne contient pas de droites. Tout point est en ballon.
L'origine est centre de symétrie.
Il est formé d'ellipses, de paraboles et d'hyperboles.
On obtient un paramétrage classique **d'une seule des deux nappes** en s'inspirant des coordonnées sphériques, et en utilisant de la trigonométrie hyperbolique : $\varphi \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 2\pi]$: $\begin{cases} x = a \operatorname{sh} \varphi \cos \theta \\ y = b \operatorname{sh} \varphi \sin \theta \\ z = c \operatorname{ch} \varphi \end{cases}$
L'hyperboloïde à deux nappes est représenté figure 14, page 21.

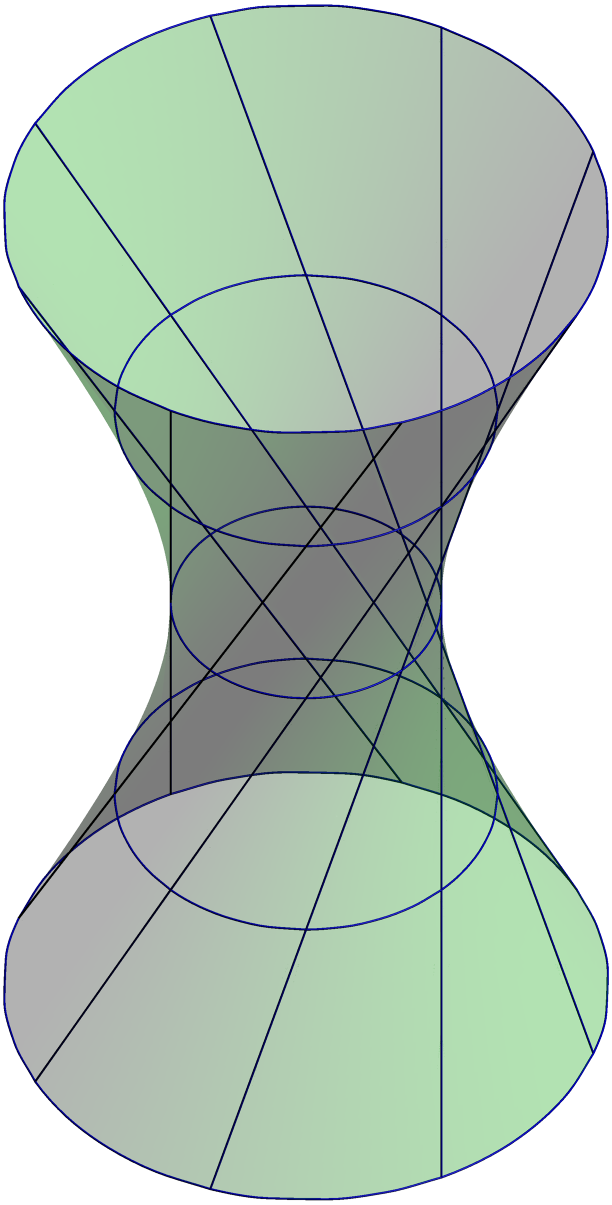

Figure 13 – **Droites sur un Hyperboloïde à 1 nappe**

6. Identification d'une quadrique

On part d'un polynôme quelconque du second degré en x, y et z :

$$\mathcal{Q} : \underbrace{ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz}_{\text{Forme Quadratique}} + \underbrace{gx + hy + iz}_{\text{Forme Linéaire}} + j = 0$$

6.1. Réduction de la forme quadratique

Il faut réduire la forme quadratique dans le cas où il y a des termes en xy, xz ou yz. Sinon, on va directement au paragraphe suivant (transformation de la forme linéaire).

- On repère la forme quadratique formée des termes du second degré :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

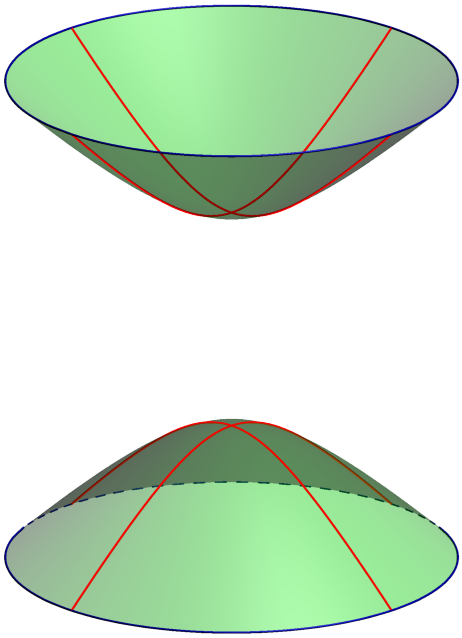

Figure 14 – **Hyperboloïde à 2 nappes**

- On considère sa matrice $\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$ qu'on diagonalise dans une base orthonormale directe de vecteurs propres, avec P la matrice de passage et λ, μ et ν les trois valeurs propres.
  Cela revient à faire une rotation du repère.
- Alors : $ax^2 + 2bxy + 2cxz + dy^2 + 2eyz + fz^2 = \lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2$ avec $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$

> Si on a deux valeurs propres égales non nulles, la quadrique est de révolution.

6.2. Transformation de la forme linéaire

La relation précédente : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ permet de transformer la forme linéaire.
On obtient alors l'équation de la quadrique dans un nouveau repère qui a subi une rotation par rapport au repère de départ.

6.3. Réduction finale

Dans ce cas, il n'y a plus de termes ni en xy, ni en xz ni en yz, (ni en XY...).
- Avaler si possible les termes en x, y et en z (ou X, Y, Z) dans des carrés correspondants par une transformation du type : $x^2 + ax = \left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2}{4}$
  Cela revient à faire une translation de l'origine du repère.
- Se ramener ensuite à une des formes canoniques décrites, en avalant au besoin dans le cas des

paraboloïdes la constante dans le terme correspondant à la valeur propre nulle. C'est alors une nouvelle translation du repère.
- On trouve des paraboloïdes elliptiques et hyperboliques, hyperboloïdes à 1 ou 2 nappes et ellipsoïdes (ou sphères),
- mais aussi des quadriques dégénérées : cylindres, cônes, ..., point, vide.

6.4. Exemple

On va chercher à identifier la quadrique d'équation $z - xy = 1$.
Pour éviter les fractions dans la matrice, on écrit : $2z - 2xy = 2$.

La forme quadratique est : $-2xy$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui a pour polynôme caractéristique : $-\lambda^3 + \lambda = 0$.
Les valeurs propres sont 0, 1 et -1, toutes simples. La forme linéaire est non nulle, on a besoin de la matrice de passage (orthogonale).

$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ convient, l'ordre des vecteurs correspondant à l'ordre annoncé des valeurs propres.
Dans cette nouvelle base, $-2xy = Y^2 - Z^2$.

La forme linéaire est $2z$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ soit $z = X$.

L'équation dans la nouvelle base est donc $2X + Y^2 - Z^2 = 2$ ou encore $Z^2 - Y^2 = 2(X-1) = 2X'$ par une translation du repère.
On a un paraboloïde hyperbolique.

6.5. Classification selon les valeurs propres

> Si on a 2 valeurs propres égales non nulles, la quadrique est de révolution.

- 3 valeurs propres strictement de même signe, on a :
  - un ellipsoïde,
  - un point,
  - le vide.
- 2 valeurs propres strictement de même signe et une nulle, on a :
  - un paraboloïde elliptique,
  - un cylindre elliptique,
  - une droite ou le vide.
- 2 valeurs propres strictement de signes différents et une nulle, on a :
  - un paraboloïde hyperbolique,
  - un cylindre hyperbolique,
  - 2 plans sécants.
- 2 valeurs propres strictement d'un signe, la troisième strictement de l'autre, on a :
  - un hyperboloïde à une ou deux nappes,
  - un cône.

- une valeur propre non nulle et 0 valeur propre double, on a :
  - un cylindre parabolique,
  - 2 plans parallèles, un plan ou le vide.

> Si une des variables est absente, c'est un cylindre.

6.6. Identification géométrique

En récapitulant ce qu'on vient de voir, on peut déterminer les intersections possibles des quadriques avec un plan quelconque ou avec un plan tangent. On peut aussi voir celles qui ont un centre, une droite ou un plan de symétrie et celles qui peuvent être de révolution. Ce qui donne les tableaux suivants.

Table 1 – **Intersection avec un plan tangent**

	E	PE	PH	H1	H2	Cyl. E	Cyl. P	Cyl. H
Deux droites : tout point est en col			×	×				
Un point : tout point est en ballon	×	×			×			
Une droite : tout point en ballon						×	×	×

Table 2 – **Intersection avec un plan non tangent**

	E	PE	PH	H1	H2	Cyl. E	Cyl. P	Cyl. H
Ellipse	×	×		×	×	×		
Parabole		×	×	×	×		×	
Hyperbole			×	×	×			×
Vide	×	×			×	×	×	×
Deux droites parallèles						×	×	×

Table 3 – **Eléments de symétrie et axe de révolution**

	E	PE	PH	H1	H2	Cyl. E	Cyl. P	Cyl. H
Centre de symétrie	1			1	1	∞		∞
Axe de symétrie	3 *ou* ∞	1	1 *ou* 3	3 *ou* ∞	3 *ou* ∞	∞	∞	∞
Plan de symétrie	3 *ou* ∞	1 *ou* ∞	2	3 *ou* ∞	3 *ou* ∞	∞	∞	∞
Peut être de révolution	×	×		×	×	×		