

## Sommaire

1. Syst. Différentiels Linéaires du 1 <sup>er</sup> ordre	1	3. Eq. Différentielle non Linéaire du 1 <sup>er</sup> ordre	8
1.1. Système linéaire du premier ordre . . . . .	1	3.1. Eq. différentielle du premier ordre . . . . .	8
1.2. Cas où A est diagonalisable . . . . .	1	3.2. Premier ordre à variables séparables . . . . .	8
1.3. A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ , pas sur $\mathbb{R}$ . . . . .	2	3.3. Système autonome . . . . .	8
1.4. A triangularisable, non diagonalisable . . . . .	3	4. Solutions Approchées d'une Eq. Diff.	9
1.5. Cas d'un système avec second membre . . . . .	3	4.1. Méthode d'Euler . . . . .	9
2. Eq. Différentielles Linéaires du 2 <sup>nd</sup> ordre	4	4.2. Autres équations différentielles . . . . .	10
2.1. Linéaire du second ordre . . . . .	4	4.3. Problèmes de la méthode . . . . .	10
2.2. Existence des solutions . . . . .	5	5. Compléments	10
2.3. Recherche des solutions . . . . .	5	5.1. Avec Maple . . . . .	10
2.4. Recollement de solutions . . . . .	7	5.2. Pour les physiciens . . . . .	11
		5.3. Colbert, lycée numérique . . . . .	12
		5.4. Les mathématiciens du chapitre . . . . .	13

Ce chapitre étudie trois types différents d'équations et systèmes différentiels :

- Les systèmes linéaires du premier ordre à coefficients constants.
- Les équations différentielles linéaires d'ordre 2.
- Les équations différentielles non linéaires du premier ordre.

Même si les fonctions cherchées peuvent être à valeur complexe, la variable est bien sûr réelle ! D'autre part, les solutions d'un système ou d'une équation différentiels n'ont de sens que sur un **intervalle**.

## 1. Systèmes Différentiels Linéaires du 1<sup>er</sup> ordre

### 1.1. Système linéaire du premier ordre

**Définition :** Soit A est une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et :  $X(t) =$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

un vecteur de classe  $\mathcal{C}^k$  sur I un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Le **système linéaire d'ordre 1 à coefficients constants et sans second membre** est :  $X'(t) = AX(t)$ .

Résoudre ce système, c'est trouver tous les vecteurs  $X(t)$  qui le vérifient.

On ne traite que les systèmes à coefficients constants, c'est à dire où A ne dépend pas de  $t$ .

### 1.2. Cas où A est diagonalisable

**Théorème :** Soit A est une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), diagonalisable. On note  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  les valeurs propres et  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$  une base de vecteurs propres associés. Alors, l'ensemble des solutions de  $X' = AX$ , sur I un intervalle quelconque, est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , et :

$$X(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} U_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} U_2 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} U_n$$

Si, de plus, on fixe la condition initiale  $X(0) = X_0$ , la solution existe et est unique.

**Démonstration :** On appelle  $P$  la matrice de passage dont la  $i^{\text{ème}}$  colonne est le vecteur  $U_i$ , alors,  $P^{-1}AP = D$ , matrice diagonale des  $\lambda_i$ . On pose :  $Y = P^{-1}X$ ,  $X = PY$ , et on a :  $Y' = P^{-1}X'$ ,  $X' = PY'$  car  $P$  est constant, puisque  $A$  est constant.

$$\begin{aligned} X' &= AX \\ PY' &= APY \\ Y' &= P^{-1}APY = DY \end{aligned}$$

On pose :  $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ , le système devient :  $\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \\ \vdots \\ y_n' = \lambda_n y_n \end{cases}$  qui se résout en :  $\begin{cases} y_1 = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2 = \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ y_n = \alpha_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$

Enfin,  $X = PY$  donne alors :  $X(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} U_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} U_2 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} U_n$  ■

On remarquera que dans ce cas, le calcul de  $P^{-1}$  est inutile.

### 1.3. Cas où $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$

Si on résout le système sur  $\mathbb{C}$  comme on vient de le faire, les valeurs propres complexes non réelles sont 2 à 2 conjuguées et on peut prendre des vecteurs propres 2 à 2 conjugués. Pour un tel couple de valeurs propres :

$$\text{Vect}(e^{\lambda t} U, e^{\bar{\lambda} t} \bar{U}) = \text{Vect}(\text{Re}(e^{\lambda t} U), \text{Im}(e^{\lambda t} U))$$

En effet :

$$e^{\lambda t} U = \text{Re}(e^{\lambda t} U) + i \text{Im}(e^{\lambda t} U) \quad \text{et} \quad e^{\bar{\lambda} t} \bar{U} = \text{Re}(e^{\lambda t} U) - i \text{Im}(e^{\lambda t} U)$$

et d'autre part :

$$\text{Re}(e^{\lambda t} U) = \frac{e^{\lambda t} U + e^{\bar{\lambda} t} \bar{U}}{2} \quad \text{et} \quad \text{Im}(e^{\lambda t} U) = \frac{e^{\lambda t} U - e^{\bar{\lambda} t} \bar{U}}{2i}$$

Or,  $\text{Re}(e^{\lambda t} U)$  et  $\text{Im}(e^{\lambda t} U)$  sont deux solutions du système différentiel sur  $\mathbb{R}$ , formant une famille libre. Ce qui donne le théorème suivant :

**Théorème :** Dans le cas où  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  mais pas sur  $\mathbb{R}$ , il suffit dans la famille génératrice des solutions de remplacer, pour les valeurs propres non réelles,

$$\alpha e^{\lambda t} U + \beta e^{\bar{\lambda} t} \bar{U} \quad \text{par} \quad a \text{Re}(e^{\lambda t} U) + b \text{Im}(e^{\lambda t} U)$$

avec  $a$  et  $b$  réels.

**Exemple :** On va résoudre le système différentiel :  $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$ .

C'est un système différentiel linéaire du premier ordre sans second membre.

Sa matrice est :  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

et son polynôme caractéristique est :  $(1 - \lambda)^2(2 - \lambda) + 1 + (1 - \lambda) = (2 - \lambda)((1 - \lambda)^2 + 1)$ .

On a donc trois valeurs propres distinctes  $2$ ,  $1 + i$  et  $1 - i$ . Par nécessité, on travaille pour le moment sur  $\mathbb{C}$ .

Les vecteurs propres suivants :  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , forment, dans l'ordre des valeurs propres, une base de chaque sous-espace propre.

Sur  $\mathbb{C}$ , les solutions sont donc :  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^t \begin{pmatrix} -\sin t + i \cos t \\ -\cos t - i \sin t \\ \cos t + i \sin t \end{pmatrix} + \gamma e^t \begin{pmatrix} -\sin t - i \cos t \\ -\cos t + i \sin t \\ \cos t - i \sin t \end{pmatrix},$$

ce qui fait que sur  $\mathbb{R}$ , les solutions sont :  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ \cos t \end{pmatrix} + c e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \sin t \end{pmatrix}$ .

#### 1.4. Cas où $A$ est triangularisable, non diagonalisable

Dans le cas où  $A$  est triangularisable, non diagonalisable, on considère  $P$  de passage telle que

$$T = P^{-1}AP$$

avec  $T$  triangulaire supérieure.

L'énoncé du problème doit vous guider pour trouver  $T$  et  $P$ .

On pose :  $X(t) = PY(t)$ , on obtient :  $X'(t) = PY'(t)$ , car  $P$  est constant.

On reporte dans le système différentiel et on obtient :  $Y'(t) = TY(t)$ .

Travaillons maintenant sur un exemple pour plus de clarté, en considérant au départ directement la

matrice triangulaire  $T$  :  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ .

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 \\ y_2' &= 3y_2 + y_3 \\ y_3' &= 3y_3 \end{aligned}$$

On résout en partant de la dernière équation, et en remontant équation par équation, puis  $X = PY$  permet de conclure.

Remarquons que le calcul de  $P^{-1}$  est toujours inutile.

#### 1.5. Cas d'un système avec second membre

Remarquons qu'il suffit de trouver une solution particulière qu'on ajoute à la solution générale du système sans second membre, puisque le problème est linéaire. Ce qu'on fait maintenant n'a donc

d'intérêt que si **on ne connaît pas de solution particulière au système...**

On a ici :  $X'(t) = AX(t) + B(t)$  avec :  $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$  des fonctions continues sur I.

A est à coefficients constants, diagonalisable. On utilise les mêmes notations que ci-dessus, avec P la matrice de passage et D la matrice diagonale et  $X = PY$ . Ce qui donne :

$$X' = AX + B$$

$$PY' = APY + B$$

$$Y' = P^{-1}APY + P^{-1}B = DY + P^{-1}B$$

On note :  $P^{-1}B(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}$ .

Le système devient :

$$y_1' = \lambda_1 y_1 + c_1(t)$$

$$y_2' = \lambda_2 y_2 + c_2(t)$$

⋮

$$y_n' = \lambda_n y_n + c_n(t)$$

On cherche une solution particulière de chaque équation et  $X = PY$  permet de conclure.

Remarquons qu'on a ici besoin de  $P^{-1}$  pour calculer  $P^{-1}B$ .

En fait, on peut souvent faire plus rapide, et sans calcul de  $P^{-1}$  quand la dimension est petite et le vecteur second membre assez simple, de la forme, par exemple, d'un polynôme par une exponentielle.

Il suffit, pour **chaque** variable, de chercher une solution particulière correspondant à un second membre combinaison linéaire de **toutes** les composantes du vecteur second membre. Dans le cas d'un polynôme par une exponentielle, les racines de l'équation caractéristique du cours de Sup sont remplacées par les valeurs propres.

Enfin, on ne tient compte des conditions initiales que lorsqu'on a la solution générale du système avec second membre.

## 2. Equations Différentielles Linéaires du second ordre

### 2.1. Equation différentielle linéaire du second ordre

**Définition :** Une équation différentielle linéaire du second ordre est une équation du type :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) \quad (E)$$

où  $a, b, c, d$  sont des fonctions continues sur I un intervalle où, de plus,  $a$  ne s'annule pas.

L'équation homogène associée à (E) est :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \quad (H)$$

## 2.2. Existence des solutions

**Théorème :** Soit :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) \quad (E)$$

où  $a, b, c, d$  sont des fonctions continues de  $I \rightarrow \mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ),  $I$  un intervalle où, de plus,  $a$  ne s'annule pas.

Soit  $x_0 \in I$ , et les conditions initiales  $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$

Alors (E) admet une solution unique de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$  qui vérifie les conditions initiales.

On ne tient compte des conditions initiales que lorsqu'on a la solution générale de l'équation avec second membre.

**Théorème :** Soit :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \quad (H)$$

où  $a, b, c, d$  sont des fonctions continues de  $I \rightarrow \mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ),  $I$  un intervalle où, de plus,  $a$  ne s'annule pas.

Alors l'ensemble des solutions de (H) sur  $I$  a une structure d'espace vectoriel de dimension 2 sur  $\mathbb{K}$ .

Ces deux théorèmes sont admis.

On notera l'intérêt d'avoir un espace vectoriel de dimension 2 car, la connaissance de 2 **solutions non proportionnelles** donne alors immédiatement **l'ensemble des solutions** par combinaison linéaire.

**Théorème :** La solution générale de (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (H).

**Démonstration :** Soit  $y_1(x)$  une solution particulière de (E),  $y(x)$  une solution quelconque de (E), alors,  $(y(x) - y_1(x))$  est solution de (H).

Réciproquement, si  $z(x)$  est solution de (H),  $(y_1(x) + z(x))$  est alors solution de (E). ■

En pratique, il nous suffit donc d'avoir :

- Une solution particulière de (E),
- Deux solutions non proportionnelles de (H).

## 2.3. Recherche des solutions

Il n'y a pas de méthode pour trouver dans tous les cas une solution de (E) ou de (H).

L'énoncé doit vous guider.

- Si on recherche une solution sous forme polynomiale, on cherchera d'abord son degré.
- On peut aussi faire un changement de variable (attention alors à la notation « prime » ambiguë) ou un changement de fonction inconnue.
- Enfin, on peut vous demander de rechercher une solution développable en série entière. On n'emploie ce procédé qu'à la demande de l'énoncé.

Il existe **un seul procédé** (à notre programme) pour construire la solution générale de (E) à partir d'une solution de (H).

C'est la **variation de la constante**.

La variation de la constante n'est pas un procédé miraculeux !

Elle peut donner des calculs longs et difficiles.

On la réserve donc au cas où **on n'a pas d'autre procédé** pour obtenir une telle solution particulière.

- Soit  $h(x)$  une solution de (H).
- On pose :

$$y(x) = z(x)h(x)$$

$$y'(x) = z'(x)h(x) + z(x)h'(x)$$

$$y''(x) = z''(x)h(x) + 2z'(x)h'(x) + z(x)h''(x)$$

On reporte dans (E) :

$$\begin{aligned} a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) &= z(x) \underbrace{(a(x)h''(x) + b(x)h'(x) + c(x)h(x))}_{=0} \\ &\quad + z'(x)(2a(x)h'(x) + b(x)h(x)) + z''(x)a(x)h(x) \\ d(x) &= z'(x)(2a(x)h'(x) + b(x)h(x)) + z''(x)a(x)h(x) \end{aligned}$$

- On obtient donc une équation différentielle linéaire du premier ordre en  $z'$  :

$$z''(x)a(x)h(x) + z'(x)(2a(x)h'(x) + b(x)h(x)) = d(x)$$

On résout d'abord cette équation sans le second membre. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} z'(x) &= K \exp\left(-\int \frac{(2a(x)h'(x) + b(x)h(x))}{a(x)h(x)} dx\right) \\ &= K \exp\left(-\int \frac{2h'(x)}{h(x)} + \frac{b(x)}{a(x)} dx\right) \\ &= \frac{K}{(h(x))^2} \exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx\right) \end{aligned}$$

Il suffit alors de terminer ce calcul et, d'éventuellement trouver une solution particulière à l'équation avec second membre. On pourra au besoin utiliser encore une fois la technique de la variation de la constante applicable aux équations différentielles linéaires du premier ordre.

- On obtient donc  $z'(x)$  qu'il suffit de primitiver.
- Enfin, on n'oublie pas que  $y(x) = z(x)h(x)$  est la solution générale de (E).
- Il faut absolument travailler **le plus longtemps possible** en calcul formel pour bénéficier des simplifications constatées...

**Exemple :** On va résoudre l'équation différentielle :  $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 0$ .

- On cherchera d'abord une solution polynomiale.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients non constants et sans second membre.

On la résout sur un intervalle  $I$  ne contenant pas 0 ni 1.

- On cherche une condition nécessaire sur le degré du polynôme, en n'écrivant à chaque fois que le terme de plus haut degré :  $y = x^n + \dots$

$$\text{et donc : } y' = nx^{n-1} + \dots$$

$$\text{et enfin : } y'' = n(n-1)x^{n-2} + \dots$$

qu'on reporte dans l'équation :

$$x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = (n(n-1) + n-1)x^n + \dots = (n-1)^2 x^n + \dots = 0,$$

on en conclut que  $n = 1$ .

- On pose donc  $y = x + a$ , d'où  $y' = 1$  et  $y'' = 0$ . On a donc  $(x + 2) - x - a = 0$  et donc  $a = 2$ .  
 $h = x + 2$  est solution de l'équation sur I.
- On applique maintenant la variation de la constante :  $y = hz$ , ce qui donne, en écourtant le calcul, qu'on mène en théorie :  
 $x(x + 1)hz'' + (2x(x + 1)h' + (x + 2)h)z' = 0$ .  
 $z' = K \exp\left(-\int \frac{2h'}{h} + \frac{x+2}{x(x+1)} dx\right) = \frac{K}{(x+2)^2} \exp\left(-\int \frac{x+2}{x(x+1)} dx\right)$   
 $z' = \frac{K}{(x+2)^2} \exp\left(-\int \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} dx\right) = K \frac{x+1}{x^2(x+2)^2} = \frac{K}{4} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+2)^2}\right)$   
en utilisant les décompositions classiques en éléments simples.  
En primitivant, on obtient :  $z = \frac{K}{4} \left(\frac{1}{(x+2)} - \frac{1}{x}\right) + L$ .
- Ce qui donne finalement  $y = \frac{K}{4} \left(1 - \frac{x+2}{x}\right) + L(x+2) = \frac{K'}{4} + L(x+2)$ .

## 2.4. Recollement de solutions

On résout une équation ou un système différentiels sur un **intervalle** où  $a(x)$  ne s'annule pas. Assez souvent, on demande de recoller les solutions sur des intervalles séparés par un point où  $a(x)$  s'annule.

Pour recoller en  $\gamma$  les solutions sur deux intervalles,  $f$  sur  $] \alpha, \gamma[$  et  $g$  sur  $] \gamma, \beta[$  il faut chercher à évaluer

- les limites (finies) de  $f$  et  $g$  en  $\gamma$
- les limites (finies) de  $f'$  et  $g'$  en  $\gamma$
- et éventuellement, les limites (finies) de  $f''$  et  $g''$  en  $\gamma$ , dans le cas d'une équation différentielle du second ordre.

On note qu'il est important **d'appeler de façons différentes** les constantes utilisées par

- $f$  sur  $] \alpha, \gamma[$  et,
- $g$  sur  $] \gamma, \beta[$ .

**Exemple :** On va chercher sur  $\mathbb{R}$ , les solutions de l'équation différentielle :  $y'' + y = |x|$ .

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et avec second membre.

L'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  est un espace affine de dimension 2 car la fonction valeur absolue est continue.

Les solutions de l'équation homogène associée sont  $y = A \cos x + B \sin x$ .

On s'occupe maintenant de l'équation avec second membre.

Sur  $] -\infty, 0[$  une solution particulière est  $y = -x$ , la solution générale :  $y = A \cos x + B \sin x - x$ .

Sur  $] 0, +\infty[$  une solution particulière est  $y = x$ , la solution générale :  $y = C \cos x + D \sin x + x$ .

Il s'agit maintenant de recoller ces deux solutions en 0.

- Egalité des limites de  $y$  en 0.  
En  $0^-$ , la limite est A et en  $0^+$ , la limite est C :  $A = C$ .
- Egalité des limites de  $y'$  en 0.  
En  $0^-$ , la limite est  $B - 1$  et en  $0^+$ , la limite est  $D + 1$  :  $D = B - 2$ .
- Egalité des limites de  $y''$  en 0.  
En  $0^-$ , la limite est  $-A$  et en  $0^+$ , la limite est  $-A$  aussi compte tenu de  $A = C$ .

La solution générale sur  $\mathbb{R}$  est donc : 
$$\begin{cases} y = A \cos x + B \sin x - x & \text{pour } x \in ] -\infty, 0[ \\ y = A \cos x + (B - 2) \sin x + x & \text{pour } x \in [ 0, +\infty[ \end{cases}$$

Cette fonction est bien de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

### 3. Equations Différentielles non Linéaires du 1<sup>er</sup> ordre

#### 3.1. Equation différentielle du premier ordre

**Définition :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , continue sur  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

Une **équation différentielle du premier ordre** est une équation du type :

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

Une solution de (1) est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur I un intervalle de  $\mathbb{R} : x \rightarrow y(x)$  telle que :

$$\forall x \in I, y'(x) = f(x, y(x))$$

**Théorème :** On utilise les notations de la définition précédente.

Si  $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ , il existe, sous certaines conditions, un intervalle I et une solution unique sur I :  $y$ , vérifiant  $y(x_0) = y_0$ . Une telle solution permet de définir une **courbe intégrale** de (1).

#### 3.2. Equation différentielle du premier ordre à variables séparables

**Définition :** L'équation (1) est dite à variables séparables lorsque, en posant  $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ , (1) peut se mettre sous la forme :

$$\varphi(x) dx = \psi(y) dy \quad (2)$$

**Théorème :** On obtient une courbe intégrale de (2) passant par le point  $M_0(x_0, y_0)$  en primitivant chacun de ses membres. Ce qui donne, en tenant compte des conditions initiales :

$$\int_{x_0}^x \varphi(x) dx = \int_{y_0}^y \psi(y) dy$$

Ce qui entraîne, en appelant  $\Phi$  et  $\Psi$  deux primitives respectives de  $\varphi$  et  $\psi$  :

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = \Psi(y) - \Psi(y_0)$$

En particulier, si l'équation (1) est incomplète, c'est à dire s'il manque  $x$  ou  $y$ , alors, elle est à variables séparables :

- Incomplète en  $x$  :

On a alors  $y' = \varphi(y)$  d'où  $\frac{dy}{\varphi(y)} = dx$  sur un intervalle où  $\varphi$  ne s'annule pas.

On obtient  $x$  comme fonction de  $y$ .

- Incomplète en  $y$  :

On a alors  $y' = \psi(x)$  d'où  $dy = \psi(x) dx$ . On obtient  $y$  comme fonction de  $x$ .

#### 3.3. Système autonome de 2 équations différentielles

**Définition :** 
$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \varphi(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = \psi(x, y) \end{array} \right\} \text{ avec } \varphi \text{ et } \psi \text{ continues sur } \mathcal{U} \text{ un ouvert de } \mathbb{R}^2,$$

est un **système autonome** de deux équations différentielles.

On l'appelle système autonome parce que la variable  $t$  n'intervient pas, en dehors des dérivées, bien sûr.

Une solution est appelée **trajectoire** du système autonome.



## a/ Système autonome et équation différentielle

- On peut transformer un système autonome en équation différentielle classique  $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)}$ . Cela revient à faire disparaître «  $t$  ».
- Réciproquement, une équation différentielle  $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)}$  peut se transformer en système autonome en « ajoutant » du temps «  $t$  »... Le tout est de bien choisir les deux fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  de façon à savoir intégrer le système autonome. On aura ainsi les trajectoires du système qui sont les courbes intégrales de l'équation différentielle en paramétriques.

## b/ Exemple

Soit l'équation différentielle  $y' = \frac{1+y}{2x+y}$ , on pose : 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 1 + y \end{cases}$$

Il est facile d'intégrer cette dernière équation, qui est, dans notre cas particulier, linéaire à coefficients constants. Cela donne :  $y = \lambda e^t - 1$ , valeur que l'on reporte dans la première :  $\frac{dx}{dt} = 2x + \lambda e^t - 1$ .

Il est encore facile d'intégrer cette équation, qui est encore, dans notre cas particulier, linéaire à coefficients constants. Cela donne cette fois :  $x = \mu e^{2t} - \lambda e^t + \frac{1}{2}$ .

Finalement, on a les courbes intégrales en paramétriques : 
$$\begin{cases} x = \mu e^{2t} - \lambda e^t + \frac{1}{2} \\ y = \lambda e^t - 1 \end{cases}$$

## c/ Intégration d'un système autonome

- Si l'une des deux est une équation différentielle, on l'intègre et on reporte dans l'autre. Cela se produit quand, par exemple,  $x$  ou  $y$  est absent d'une des deux équations.
- On peut aussi essayer de l'intégrer en passant en complexes,  $z = x + iy$ . Il se peut qu'on tombe sur une équation différentielle en  $z$ .
- On peut enfin essayer de passer en polaires ou de faire un autre changement de variable **en suivant les indications de l'énoncé**.

## 4. Solutions Approchées d'une Equation Différentielle

### 4.1. Méthode d'Euler pour une équation différentielle du premier ordre

Le principe de la méthode d'Euler est très simple. On va l'appliquer à une équation différentielle du premier ordre :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

On cherche une solution approchée vérifiant la condition initiale. Pour cela, on choisit un pas  $\Delta x$ , on écrit :

$$\Delta y = f(x_0, y_0) \times \Delta x$$

et on approxime :  $y(x_0 + \Delta x) \simeq y(x_0) + \Delta y$ .

On pose alors :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \Delta x \\ y_1 &= y_0 + \Delta y \end{aligned}$$

Ensuite, on calcule :  $\Delta y = f(x_1, y_1) \times \Delta x$ ,

et on pose :

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y$$

On recommence jusqu'à avoir une solution approchée sur l'intervalle désiré.

## 4.2. Autres équations différentielles

La méthode d'Euler est applicable aux autres équations différentielles et systèmes différentiels.

Avec, par exemple, une équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = y'_0$$

On choisit  $\Delta x$ , avec les approximations, on pose :

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \Delta x \\ y_1 = y_0 + y'_0 \times \Delta x \\ y'_1 = y'_0 + f(x_0, y_0, y'_0) \times \Delta x \end{cases}$$

On recommence ensuite à partir de  $x_1, y_1$  et  $y'_1$ ... pour calculer  $x_2, y_2$  et  $y'_2$ ...

## 4.3. Problèmes de la méthode

La méthode d'Euler a l'avantage de toujours être applicable.

L'inconvénient essentiel est dû à l'accumulation des erreurs qui peuvent faire que, rapidement, la fonction calculée point par point n'a plus de rapport avec la solution cherchée.

Géométriquement, il est facile d'observer que si les courbes intégrales ont de fortes courbures en certains points, la méthode dérive vite et donne des courbes sans rapport avec les courbes intégrales.

Par ailleurs, un petit pas allonge les calculs et un grand pas augmente les erreurs...

# 5. Compléments

## 5.1. Avec Maple

### a/ Solutions exactes

C'est la fonction « `dsolve` » permet de résoudre les équations différentielles ou les systèmes d'équations différentielles avec ou sans conditions initiales. Attention, le résultat est parfois déroutant.

Donnons quelques syntaxes :

- Sans condition initiale :  
> `dsolve(2*diff(y(x),x)+y(x)=cos(x),y(x))` ;
- Avec condition initiale :  
> `dsolve({2*diff(y(x),x)+y(x)=cos(x),y(0)=0},y(x))` ;
- Pour un système (auquel on pourrait inclure des conditions initiales) :  
> `dsolve({diff(x(t),t)=-y(t),diff(y(t),t)=x(t)},{x(t),y(t)})` ;

Cette fonction donne simplement l'équation des courbes intégrales (qu'elle a déterminées). Si on veut récupérer les solutions dans une expression, il faut utiliser la fonction de substitution comme dans l'exemple suivant :

> `Solution :=dsolve(2*diff(y(x),x)+y(x)=cos(x),y(x))` ;

> `s :=subs(Solution,y(x))` ;

## b/ Représentation des courbes intégrales

Dans le package « DEtools », la fonction « DEplot » permet de représenter les solutions d'une équation différentielle. Il s'agit du graphe de solutions approchées.

```
> DEplot(2*diff(y(x),x)+y(x)=cos(x), [x,y], -5..5, {[0,1],[0,2],[0,5]});
```

On trouve dans l'ordre, l'équation différentielle, les axes en commençant par la variable, l'intervalle de variation de la variable et la liste des conditions initiales.

## c/ Solutions approchées d'une équation différentielle

Pour une équation ou un système différentiel avec conditions initiales, c'est l'option « numeric » de « dsolve » qui permet de demander une solution approchée. Les conditions initiales doivent être telles qu'il n'y a plus de constante d'intégration ! Donnons un exemple :

```
> Solution := dsolve({2*diff(y(x),x)+y(x)=cos(x), y(0)=0}, y(x), numeric);
> Solution(2);
```

Il faut bien sûr demander la valeur d'une solution en un point !

## 5.2. Pour les physiciens

## a/ Régimes transitoire et permanent

On notera la différence essentielle de vocabulaire entre mathématiciens et physiciens dans le traitement des équations différentielles linéaires.

Mathématiques	Physique
Solution <b>particulière</b> de l'équation différentielle <b>avec</b> second membre	Régime <b>permanent</b>
Solution <b>générale</b> de l'équation différentielle <b>sans</b> second membre	Régime <b>transitoire</b>

Il n'y a pas d'erreur, le vocabulaire des physiciens vient de ce que, très souvent, la solution générale de l'équation sans second membre tend rapidement vers 0...

Il ne reste alors que la solution particulière de l'équation avec second membre... qui est bien le régime permanent !

Rappelons enfin qu'en physique, comme ailleurs, on ne calcule que ce qui nous intéresse.

Enfin, rappelons qu'en physique, comme en techno, le régime transitoire est souvent négligé, ce qui conduit à ne pas avoir à résoudre l'équation sans second membre.

## b/ Phénomène oscillatoire « libre »

Dans le cas d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre, c'est à dire « libre » ou « non forcé », on peut remarquer que :

le phénomène est oscillatoire (amorti ou non) **si et seulement si**  $\Delta < 0$

où  $\Delta$  est le discriminant de l'équation caractéristique.

En effet, il faut une partie imaginaire non nulle aux solutions de l'équation caractéristique pour avoir des cosinus et sinus, et donc un aspect « oscillatoire ».

## c/ Equation différentielle harmonique

En physique, on écrit **directement** les solutions de :  $y'' + \omega^2 y = 0$  sous la forme :

- $y = A \cos \omega t + B \sin \omega t$
- ou,
- $y = C \cos \omega t \pm \varphi$

mais **jamais**,

- $y = \lambda e^{i\omega t} + \mu e^{-i\omega t}$

Jamais veut bien dire *jamais* !

**Remarque :**  $A, B, C$  et  $\varphi$  sont réels tandis que  $\lambda$  et  $\mu$  sont complexes conjugués.

### 5.3. Colbert, lycée numérique

#### a/ Maple

C'est la fonction `dsolve`, « *differential equation solver* », qui permet de résoudre une équation ou un système différentiels.

Pour nous, la syntaxe générale est `dsolve({équa-diff, cond-init}, y(x))`

ou `dsolve({équa-diff, cond-init, cond-init}, y(x))` pour une équation du second ordre.

La dérivation dans l'équation différentielle se note avec la fonction `diff`.

Sans conditions initiales suffisantes, Maple ajoute des constantes nommées `_C1...`

On peut aussi utiliser les options `type=numeric` pour une résolution numérique approchée.

La syntaxe est alors `dsolve({équa-diff, cond-init}, y(x), type=numeric)`

Le package `DEtools` contient aussi (entre autres) la commande `DEplot` pour un graphe approché des courbes intégrales.

Pour un systèmes, la syntaxe générale dans le cas de deux équations sera

`dsolve({équa-diff, équa-diff, cond-init, cond-init}, {y(x), z(x)})`

#### b/ HP 40G-GS

Il faut aller dans le CAS, menu `SOLV`.

- Pour une équation différentielle linéaire à coefficients constants, on utilise la fonction `LDEC`, « *Linear Differential Equation with Constants coeff.* ».

Attention, la syntaxe est ici `LDEC(second membre, équation caractéristique)` ! On n'écrit donc jamais de dérivée...

- Pour une autre équation différentielle, on utilise la fonction `DESOLVE`, « *Differential Equation SOLVER* ».

La syntaxe est `DESOLVE(eq, Y(X))`, avec `eq` qui est

- l'équation différentielle ou
- l'équation différentielle et la ou les conditions initiales.

Ces différents éléments sont alors séparés par des `AND`.

La dérivation se note ici `d1Y(X)` ou `d1d1Y(X)` pour une dérivée première ou seconde.

Les constantes éventuelles sont nommées `cC0...`

#### c/ HP 50G

Il faut aller dans le menu `CALC`, sous-menu `DIFFERENTIAL EQNS`.

- Pour une équation différentielle linéaire à coefficients constants, ou un système différentiel linéaire à coefficients constants, c'est la fonction `LDEC`, « *Linear Differential Equation with Constants coeff.* ».

Attention, la syntaxe est ici, pour une équation différentielle, `LDEC(second membre, équation caractéristique)` ! On n'écrit donc jamais de dérivée...

Pour un système, la syntaxe est `LDEC(vecteur second membre, matrice du système)` ! On n'écrit donc jamais de dérivée non plus...

Il sera souvent plus qu'utile de renommer les constantes données par la machine...

- Pour une autre équation différentielle, c'est la fonction `DESOLVE`, « *Differential Equation SOLVER* ».

La syntaxe est `DESOLVE(eq, Y(X))`, avec `eq` qui est

- l'équation différentielle ou
- un vecteur contenant l'équation différentielle et la ou les conditions initiales.

La dérivation se note ici `d1Y(X)` ou `d1d1Y(X)` pour une dérivée première ou seconde.

Les constantes éventuelles sont nommées  $cC_0\dots$

#### d/ TI 89

Pour intégrer une équation différentielle, on va dans le menu **MATH**, sous-menu **Calculus**, fonction **deSolve**, « *differential equation Solver* ».

la syntaxe est **deSolve**(*eq, variable, fonc-inconnue*) avec *eq* qui est

- l'équation différentielle ou
- l'équation différentielle et la ou les conditions initiales.

Ces différents éléments sont alors séparés par des **and**.

La dérivation dans l'équation différentielle se note « ' ».

Les constantes éventuelles sont nommées @1...

Enfin, dans le menu **mode**, on peut mettre **graph** sur **DIFF EQUATIONS.**, ce qui permet d'avoir le graphe, exact ou approché des solutions d'une équation différentielle.

#### e/ TI N-inspire CAS

On va dans l'application **Calculus**, menu **Analyse**, on y trouve la fonction **deSolve**, « *differential equation Solver* ».

la syntaxe est **deSolve**(*eq, variable, fonc-inconnue*) avec *eq* qui est

- l'équation différentielle ou
- l'équation différentielle et la ou les conditions initiales.

Ces différents éléments sont alors séparés par des **and**.

La dérivation dans l'équation différentielle se note « ' ».

Les constantes éventuelles sont nommées c1...

#### f/ ClassPad 300

C'est, dans le menu **Action**, sous-menu **Equation/Inequality**, la fonction **dSolve** qui permet de résoudre les équations et systèmes différentiels.

La syntaxe est **dSolve**(*équa-diff, fonc-inconnue, variable, cond-init*) pour une équation.

La dérivation dans l'équation différentielle se note « ' ».

Sans condition initiales, la solution contiendra des constantes.

Pour une équation du second ordre, on place les deux conditions initiales séparées par une virgule, comme ci-dessous.

Pour un système, ce sera

**dSolve**(*{équa-diff, equa-diff}, fonc-inconnue, {variable, variable}, cond-init, cond-init*)

### 5.4. Les mathématiciens du chapitre

**Riccati Jacopo 1676-1754** Mathématicien italien connu pour ses travaux sur les équations différentielles et le calcul intégral.

**Bernoulli Jean 1667-1748** Mathématicien suisse, connu pour ses travaux sur la trigonométrie et l'étude du Logarithme, les équations différentielles...

**Bernoulli Daniel 1700-1782** Fils du précédent, initiateur, entre autres des équations aux dérivées partielles.

**Euler Léonard 1707-1783** Toujours Euler...