Sommaire

Figures

Dans tout le chapitre, $\mathbb{R}^3$ sera muni d'un repère orthonormal $\left(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$.

1. Etude des quadriques

1.1. Quadriques propres ou dégénérées

Définition : Une quadrique est une surface dont l'équation est un polynôme du second degré en x, y, z.

Les quadriques sont en quelque sorte à l'espace ce que les coniques sont au plan.
Certaines quadriques sont dites dégénérées. Ainsi, une « quadrique » peut être :

- vide, par exemple : $x^2+y^2+z^2=-1$
- un point, par exemple : $x^2+y^2+z^2=0$
- une droite, par exemple : $x^2+y^2=0$
- un plan, par exemple : $x^2=0$
- deux plans, par exemple : $xy=0$ ou $x^2-y^2=0$ ou $x^2=1$

D'autres quadriques ne sont que des cas particuliers de surfaces déjà étudiées, ce sont :

- des cylindres à base :
  - elliptique, dont certains de révolution, par exemple : $x^2+y^2=1$ ou $x^2+2y^2=1$
  - parabolique, par exemple : $y=x^2$, ou
  - hyperbolique, par exemple : $x^2-y^2=1$
- des cônes, dont certains de révolution, par exemple : $x^2+y^2-z^2=0$.

Les autres quadriques sont les quadriques dites propres, objet réel de ce chapitre.

1.2. Intersection avec un plan

Théorème :
L'intersection d'une quadrique (dégénérée ou non) avec un plan est une conique (dégénérée ou non).

> Attention , l'intersection d'une quadrique propre avec un plan peut être une conique dégénérée...

Démonstration : Un changement de repère, orthonormal ou non, transforme une équation du second degré en une équation du second degré.
On peut donc supposer que le plan est d'équation $\mathscr{P} : z = 0$.

$$\mathcal{Q} : ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

a pour intersection avec $\mathscr{P}$:

$$\mathscr{C} : ax^2 + by^2 + 2dxy + gx + hy + j = 0$$

On a bien l'équation générale d'une conique. ■

1.3. Quadriques de révolution

L'intersection d'une quadrique avec un plan étant une conique, l'intersection d'une quadrique de révolution d'axe Δ avec un plan méridien est une conique dont Δ est axe de symétrie...
Une quadrique de révolution est donc engendrée par la rotation d'une conique autour d'un de ses axes de symétrie.
Certaines quadriques quadriques ainsi obtenues sont des cylindres et des cônes de révolution.
Mais certaines quadriques sont de « nouvelles » surfaces, quadriques dites propres.
On va ainsi trouver :

- Le paraboloïde de révolution, obtenu en faisant tourner une parabole autour de son axe.
- L'ellipsoïde de révolution, obtenu en faisant tourner une ellipse autour d'un de ses axes.
  Il sera en forme de « ballon de rugby » si l'axe de révolution est l'axe focal de l'ellipse et en forme de « soucoupe » si l'axe de révolution est l'axe non focal de l'ellipse.
- L'hyperboloïde de révolution à une nappe, obtenu en faisant tourner une hyperbole autour de son axe non focal.
- L'hyperboloïde de révolution à deux nappes, obtenu en faisant tourner une hyperbole autour de son axe focal.

1.4. Equations réduites des quadriques propres

Définition : Il y a 5 types de quadriques propres :

- Le paraboloïde elliptique (PE) d'équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{2z}{c}, \quad a > 0, b > 0, c \neq 0$
  Si $a = b$, il est de révolution d'axe Oz.
- Le paraboloïde hyperbolique (PH) d'équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{2z}{c}, \quad a > 0, b > 0, c \neq 0$
  Il n'est jamais de révolution.
- L'ellipsoïde (E) d'équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0$
  Si $a = b$, il est de révolution d'axe Oz.
- L'hyperboloïde à une nappe $(H1)$ d'équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0$
  Si $a = b$, il est de révolution d'axe Oz.
- L'hyperboloïde à deux nappes $(H2)$ d'équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1, \quad a > 0, b > 0, c > 0$
  Si $a = b$, il est de révolution d'axe Oz.

On verra plus loin qu'on peut toujours faire un changement de repère orthonormal tel que dans ce repère l'équation d'une quadrique donnée est réduite.
Toutes, sauf le paraboloïde hyperbolique possédent une « version » de révolution. On a ainsi facilement une description géométrique de ces quadriques en dilatant selon un ou deux axes la quadrique de révolution correspondante.

1.5. Le paraboloïde elliptique (PE)

Equation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2pz \quad avec \quad a>0 \quad b>0$

Si $a=b$ il est de révolution d'axe $0z$, alors obtenu en faisant tourner une parabole autour de son axe de symétrie.
Il est formé de paraboles (intersection avec un plan vertical) et d'ellipses.
L'intersection avec le plan tangent est réduite à un point. Tout point est en ballon. Il ne contient pas de droites.
Il n'y a pas non plus de centre de symétrie.
On obtient un paramétrage classique en s'inspirant des coordonnées cylindriques :

$$t \in \mathbb{R}^+, \theta \in [0,2\pi] \begin{cases} x = a\, t\cos\theta \\ y = b\, t\sin\theta \\ z = \dfrac{t^2}{2p} \end{cases}$$

Le paraboloïde elliptique est représenté figure 1, ci-dessous.

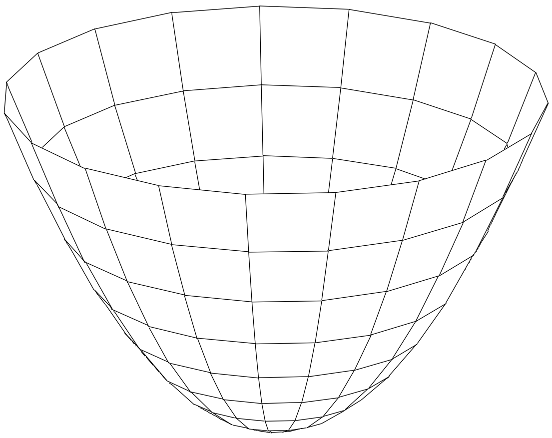

Figure 1 – ***Paraboloïde Elliptique***

1.6. Le paraboloïde hyperbolique (PH)

Equation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2pz \quad avec \quad a>0 \quad b>0$

Il n'est jamais de révolution, mais contient deux familles de droites obtenues en factorisant

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)$$

ce qui donne : $\begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=k \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{2pz}{k} \end{cases}$ et $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=k \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\dfrac{2pz}{k} \end{cases}$ avec k non nul.

Pour un point donné de ce paraboloïde, on obtient les deux droites tracées sur ce paraboloïde et qui passent par ce point en remplaçant x,y,z par les coordonnées du point, ce qui donne à chaque fois la valeur correspondante de k.
L'intersection avec le plan tangent est formée de 2 droites. Par tout point, il passe deux droites distinctes tracées sur la surface, intersection avec le plan tangent à ce point. Tout point est en col.
Il n'a pas de centre de symétrie.
Il est formé d'hyperboles et de paraboles.
On obtient un paramétrage classique en s'inspirant des coordonnées cylindriques associées à de la trigonométrie hyperbolique : $t \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R} \begin{cases} x = a\,t\,\mathrm{ch}\,\theta \\ y = b\,t\,\mathrm{sh}\,\theta \\ z = \dfrac{t^2}{2p} \end{cases}$ pour $\left|\dfrac{x}{a}\right| > \left|\dfrac{y}{b}\right|$
On inverse ch et sh et le signe de z pour $\left|\dfrac{x}{a}\right| < \left|\dfrac{y}{b}\right|$
Le paraboloïde hyperbolique est représenté figure 2, ci-dessous.

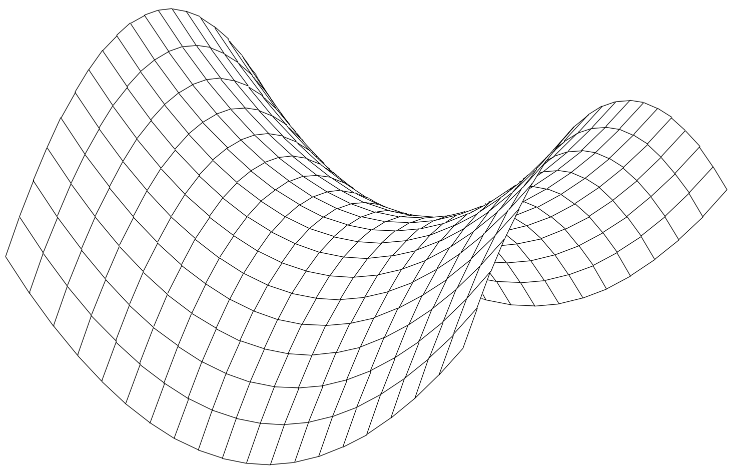

Figure 2 – ***Paraboloïde Hyperbolique***

1.7. L'Ellipsoïde (E)

Equation réduite centrée : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \quad avec \quad a > 0 \quad b > 0 \quad c > 0$

Si $a = b$ il est de révolution d'axe $0z$. Il est alors obtenu en faisant tourner une ellipse autour d'un de ses axes de symétrie.
L'intersection avec le plan tangent est réduite à un point. Il ne contient pas de droites. Tout point est en ballon.
L'origine est centre de symétrie.
Il est formé d'ellipses.
On obtient un paramétrage classique en s'inspirant des coordonnées sphériques :

$$\theta \in [0,2\pi], \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \begin{cases} x = a \cos\varphi \cos\theta \\ y = b \cos\varphi \sin\theta \\ z = c \sin\varphi \end{cases}$$

L'ellipsoïde est représenté figure 3, page ci-contre.

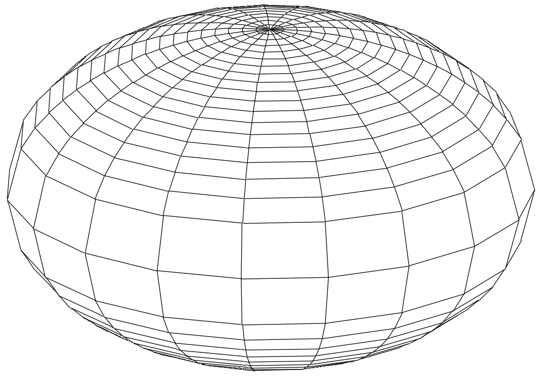

Figure 3 – ***Ellipsoïde***

1.8. L'hyperboloïde à une nappe $(H1)$

Equation réduite centrée : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \quad avec \quad a>0 \quad b>0 \quad c>0$

Si $\quad a=b \quad$ il est de révolution d'axe $0z$, alors obtenu en faisant tourner une hyperbole autour de son axe de symétrie non focal.

Le **cône asymptote** est d'équation : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$

Il contient deux familles de droites obtenues en factorisant $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}$ et $1-\dfrac{y^2}{b^2}$ comme différences de 2 carrés :

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)$$

Ce qui donne : $\begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=k\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{k}\left(1+\dfrac{y}{b}\right) \end{cases}$ et $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=k\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{k}\left(1+\dfrac{y}{b}\right) \end{cases}$ avec k non nul.

Pour un point donné de cet hyperboloïde, on obtient les deux droites tracées sur cet hyperboloïde et qui passent par ce point en remplaçant x,y,z par les coordonnées du point, ce qui donne à chaque fois la valeur correspondante de k.

L'intersection avec le plan tangent est formée de 2 droites. Par tout point, il passe deux droites distinctes tracées sur la surface, intersection avec le plan tangent à ce point. Tout point est un point col.

L'origine est centre de symétrie.

Il est formé d'ellipses, de paraboles et d'hyperboles.

On obtient un paramétrage classique en s'inspirant des coordonnées sphériques, et en utilisant de la trigonométrie hyperbolique : $\quad \varphi\in\mathbb{R},\theta\in[0,2\pi] \begin{cases} x=a\,\mathrm{ch}\,\varphi\cos\theta \\ y=b\,\mathrm{ch}\,\varphi\sin\theta \\ z=c\,\mathrm{sh}\,\varphi \end{cases}$

L'hyperboloïde à une nappe est représenté figure 4, page suivante.

1.9. L'hyperboloïde à 2 nappes $(H2)$

Equation réduite centrée : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1 \quad avec \quad a>0 \quad b>0 \quad c>0$

Si $\quad a=b \quad$ il est de révolution d'axe $0z$, alors obtenu en faisant tourner une hyperbole autour de son axe focal.

Le **cône asymptote** est d'équation : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$

L'intersection avec le plan tangent est réduite à un point. H2 ne contient pas de droites. Tout point est en ballon.

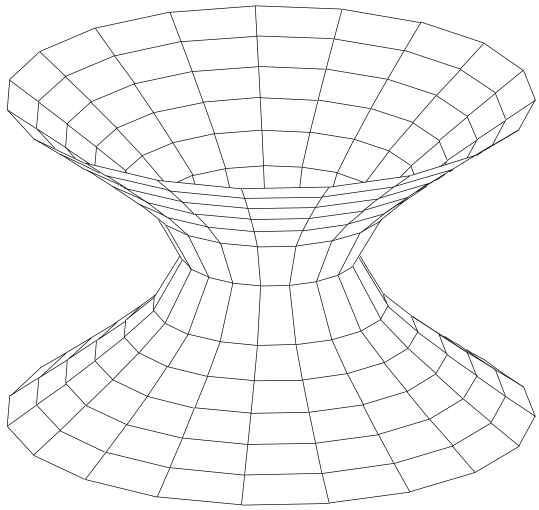

Figure 4 – ***Hyperboloïde à une nappe***

L'origine est centre de symétrie.
Il est formé d'ellipses, de paraboles et d'hyperboles.
On obtient un paramétrage classique **d'une seule des deux nappes** en s'inspirant des coordonnées sphériques, et en utilisant de la trigonométrie hyperbolique : $\varphi \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi]$ $\begin{cases} x = a \operatorname{sh} \varphi \cos \theta \\ y = b \operatorname{sh} \varphi \sin \theta \\ z = c \operatorname{ch} \varphi \end{cases}$
L'hyperboloïde à deux nappes est représenté figure 5, ci-dessous.

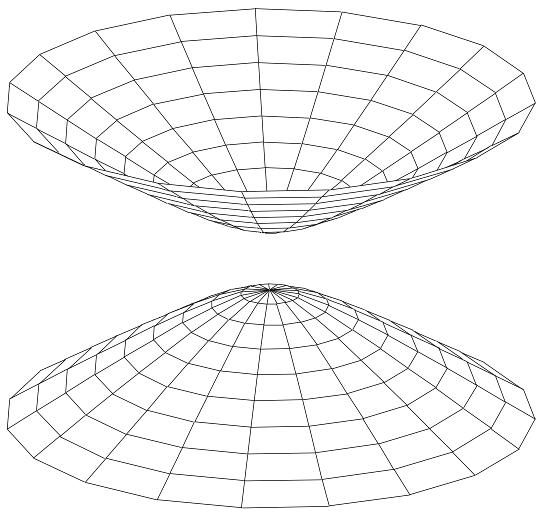

Figure 5 – ***Hyperboloïde à 2 nappes***

2. Identification d'une quadrique

On part d'un polynôme quelconque du second degré en x, y et z :

$$\mathcal{Q} : \underbrace{ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz}_{\textit{Forme Quadratique}} + \underbrace{gx + hy + iz}_{\textit{Forme Linéaire}} + j = 0$$

2.1. Réduction de la forme quadratique

Il faut réduire la forme quadratique dans le cas où il y a des termes en xy, xz ou yz. Sinon, on va directement au paragraphe suivant (transformation de la forme linéaire).

- On repère la forme quadratique formée des termes du second degré :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

- On considère sa matrice $\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$ qu'on diagonalise dans une base orthonormale directe de vecteurs propres, avec P la matrice de passage et λ, μ et ν les trois valeurs propres.
  Cela revient à faire une rotation du repère.
- Alors : $ax^2 + 2bxy + 2cxz + dy^2 + 2eyz + fz^2 = \lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2$ avec $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$

> Si on a deux valeurs propres égales non nulles, la quadrique est de révolution.

2.2. Transformation de la forme linéaire

La relation précédente : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ permet de transformer la forme linéaire.

On obtient alors l'équation de la quadrique dans un nouveau repère qui a subi une rotation par rapport au repère de départ.

2.3. Réduction finale

Dans ce cas, il n'y a plus de termes ni en xy, ni en xz ni en yz, (ni en XY...).

- Avaler si possible les termes en x, y et en z (ou X,Y,Z) dans des carrés correspondants par une transformation du type : $x^2 + ax = \left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2}{4}$
  Cela revient à faire une translation de l'origine du repère.
- Se ramener ensuite à une des formes canoniques décrites, en avalant au besoin dans le cas des paraboloïdes la constante dans le terme correspondant à la valeur propre nulle. C'est alors une nouvelle translation du repère.
  - On trouve des paraboloïdes elliptiques et hyperboliques, hyperboloïdes à 1 ou 2 nappes et ellipsoïdes (ou sphères),
  - mais aussi des quadriques dégénérées: cylindres, cônes, ..., point, vide.

2.4. Exemple

On va chercher à identifier la quadrique d'équation $z - xy = 1$.
Pour éviter les fractions dans la matrice, on écrit : $2z - 2xy = 2$.

La forme quadratique est : $-2xy$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui a pour polynôme caractéristique : $-\lambda^3 + \lambda = 0$.

Les valeurs propres sont 0, 1 et -1, toutes simples. La forme linéaire est non nulle, on a besoin de la matrice de passage (orthogonale).

$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ convient, l'ordre des vecteurs correspondant à l'ordre annoncé des valeurs propres.

Dans cette nouvelle base, $-2xy = Y^2 - Z^2$.

La forme linéaire est $2z$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ soit $z = X$.

L'équation dans la nouvelle base est donc $2X + Y^2 - Z^2 = 2$ ou encore $Z^2 - Y^2 = 2\,(X - 1) = 2X'$ par une translation du repère.
On a un paraboloïde hyperbolique.

2.5. Classification selon les valeurs propres

Si on a 2 valeurs propres égales non nulles, la quadrique est de révolution.

- 3 valeurs propres strictement de même signe, on a :
  - un ellipsoïde,
  - un point,
  - le vide.
- 2 valeurs propres strictement de même signe et une nulle, on a :
  - un paraboloïde elliptique,
  - un cylindre elliptique,
  - une droite ou le vide.
- 2 valeurs propres strictement de signes différents et une nulle, on a :
  - un paraboloïde hyperbolique,
  - un cylindre hyperbolique,
  - 2 plans sécants.
- 2 valeurs propres strictement d'un signe, la troisième strictement de l'autre, on a :
  - un hyperboloïde à une ou deux nappes,
  - un cône.
- une valeur propre non nulle et 0 valeur propre double, on a :
  - un cylindre parabolique,
  - 2 plans parallèles, un plan ou le vide.

Si une des variables est absente, c'est un cylindre.

2.6. Identification géométrique

En récapitulant ce qu'on vient de voir, on peut déterminer les intersections possibles des quadriques avec un plan quelconque ou avec un plan tangent. On peut aussi voir celles qui ont un centre de symétrie et celles qui peuvent être de révolution.

	E	PE	PH	H1	H2
Ellipse	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$
Parabole		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
Hyperbole			$\times$	$\times$	$\times$
Vide	$\times$	$\times$			$\times$
Plan tangent : deux droites, tout point est en col			$\times$	$\times$	
Plan tangent : un point, tout point est en ballon	$\times$	$\times$			$\times$
Il y a un centre de symétrie	$\times$			$\times$	$\times$
Peut être de révolution	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$