Sommaire

1. Isométries Affines **1**
- 1.1. Application affine 1
- 1.2. Isométrie vectorielle associée 1
- 1.3. Principe général d'étude 2
- 1.4. Isométries affines sans points fixes . . . 2

2. Isométries affines du plan **2**
- 2.1. Tous les points sont fixes 2
- 2.2. Une droite fixe Δ 2
- 2.3. Un seul point fixe Ω 2
- 2.4. Pas de points fixes 3
- 2.5. Exemple 3

3. Isométries affines de l'espace **4**
- 3.1. Tous les points sont fixes 4
- 3.2. Un plan fixe Π 4
- 3.3. Une droite fixe Δ 4
- 3.4. Un seul point fixe Ω 4
- 3.5. Pas de points fixes 4
- 3.6. Exemple 5

4. Décomposition en produit de réflexions **6**
- 4.1. Dans le plan 6
- 4.2. Dans l'espace 7

Notations

Dans tout le chapitre, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension 2 ou 3, muni d'une base orthonormale directe, notée : $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ou $\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ selon les cas.
$\mathscr{E}$ désigne un espace affine euclidien de dimension 2 ou 3, muni d'un repère orthonormal direct, noté $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ou $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ selon les cas.
On dira que E est l'espace vectoriel sous-jacent à $\mathscr{E}$.
En général, on note M' l'image d'un point M par une application affine.
De même, si Δ est une droite affine, sa **direction** $\vec{\Delta}$ est la droite vectorielle associée, c'est à dire l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ avec M et N appartenant à Δ.
De même également avec Π un plan affine et $\vec{\Pi}$ le plan vectoriel associé, toujours appelé sa **direction**.

Définition : Si $\mathscr{E}$ est un plan affine, une **réflexion** est une symétrie orthogonale par rapport à une droite affine.

Définition : Si $\mathscr{E}$ est un espace affine de dimension 3, une **réflexion** est une symétrie orthogonale par rapport à un plan affine.

Il est clair que la notion de reflexion est à manier avec soin, puisqu'elle dépend de la dimension de l'espace dans lequel on travaille.

1. Isométries Affines

1.1. Application affine

Définition : f est une application affine si et seulement si
$\varphi : E \to E$, définie par : $\varphi\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{M'N'}$ est bien définie et est linéaire.

Définition : $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ est une **isométrie affine** $\Leftrightarrow \forall A,B \in \mathscr{E},\quad d\left(f(A),f(B)\right) = d\left(A',B'\right) = d\left(A,B\right)$

On dit qu'une isométrie affine conserve les distances.

1.2. Isométrie vectorielle associée

Théorème : Soit f une isométrie affine.
Alors $\varphi : E \to E$, définie par $\varphi\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{M'N'}$ est une isométrie vectorielle, c'est à dire un automorphisme orthogonal.
On dit que φ est l'**isométrie vectorielle associée à** f.

Démonstration : Notons simplement que : $\left\|\varphi\left(\overrightarrow{MN}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{M'N'}\right\| = d(M',N') = d(M,N) = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|$
Conserver la distance des points équivaut à conserver la norme des vecteurs. ■

En pratique, dans le repère et la base donnés, l'isométrie vectorielle associée s'obtient en « éliminant » les constantes.
Cela permet d'avoir la matrice de φ dans la base orthonormale. Cette matrice est bien sûr orthogonale.
On rappelle que φ, une isométrie vectorielle, est une symétrie orthogonale si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

Théorème : f est une isométrie affine $\Leftrightarrow$ φ est orthogonale

Démonstration : $\forall A,B \in \mathscr{E}, \quad d\left(f\left(A\right),f\left(B\right)\right) = d\left(A',B'\right) = d\left(A,B\right) \Leftrightarrow \forall \overrightarrow{u} \in E, \quad \left\|\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{u}\right\|$
On obtient cette équivalence en posant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ ■

Définition : Si φ est directe, f est un **déplacement**, si φ est indirecte, f est un **antidéplacement**.

1.3. Principe général d'étude

Le principe général d'étude repose sur deux éléments :
- La recherche des **points fixes** de f.
- L'idendification de φ l'isométrie vectorielle associée.

Dans le cas où il y a un ou plusieurs points fixes, f est une sorte de « copie affine » de φ.
La description de f s'obtient en remplaçant, dans la description de φ,
- les espaces vectoriels par
- les espaces affines correspondants qui passent par un des points fixes de f.

1.4. Isométries affines sans points fixes

Théorème : Une isométrie affine sans points fixes se décompose toujours **de façon unique** comme la composée **commutative** :
- une isométrie affine avec points fixes et
- une translation de vecteur dans la direction des points fixes de l'isométrie précédente.

La démonstration est admise.
En pratique, si on appelle $\overrightarrow{E_1}$ l'ensembles des vecteurs propres de φ pour la valeur propre 1, on cherche les points M tels que $\overrightarrow{MM'} \in \overrightarrow{E_1}$. Cela fournit :
- les points fixes de l'isométrie affine avec points fixes **et**
- le vecteur de la translation qui est $\overrightarrow{MM'}$ pour un point M tel que $\overrightarrow{MM'} \in \overrightarrow{E_1}$.

2. Isométries affines du plan

On cherche d'abord les points fixes de l'isométrie affine.

2.1. Tous les points sont fixes

C'est l'identité ! C'est un déplacement.

2.2. Une droite fixe Δ

C'est une symétrie orthogonale par rapport à Δ, qui est un anti-déplacement. On dit aussi que c'est une réflexion. Notons que normalement on a remarqué que la matrice de φ est symétrique.

2.3. Un seul point fixe Ω

C'est une rotation de centre Ω et d'angle l'angle de la rotation vectorielle associée. C'est un déplacement.

2.4. Pas de points fixes

- Cela peut être une translation, qui est un déplacement.
- Sinon, l'isométrie vectorielle associée est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle $\overrightarrow{\Delta}$. La matrice de φ, qui est une isométrie vectorielle, dans une base orthonormale, est d'ailleurs alors symétrique.
  L'isométrie affine est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ de direction $\overrightarrow{\Delta}$ et d'une translation. On trouve Δ et le vecteur de la translation en cherchant les points M tels que $\overrightarrow{MM'} \in \overrightarrow{\Delta}$. Ce que, de toutes façons, on a déjà vu sur la matrice qui est symétrique.
  On appelle parfois cette transformation une **symétrie-glissée**. C'est un anti-déplacement.

La figure 1, ci-dessous, montre bien que l'on peut inverser l'ordre de la symétrie et de la translation.

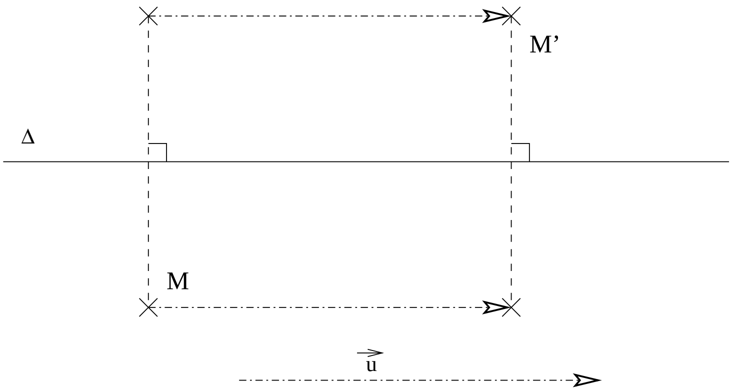

Figure 1 – ***Symétrie-Translation***

2.5. Exemple

On va étudier la transformation donnée dans un repère orthonormal par : $\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 3 \end{cases}$.

L'application affine associée a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est bien une matrice orthogonale, donc une matrice d'isométrie.
Comme cette matrice est symétrique, la transformation vectorielle associée est une symétrie orthogonale. C'est la symétrie par rapport à la droite vectorielle d'équation $y = x$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
L'isométrie affine n'a clairement aucun point fixe !
On cherche dons les points M tels que $\overrightarrow{MM'} // \overrightarrow{u}$, c'est à dire $y - 1 - x = x + 3 - y$, c'est donc la droite d'équation : $y - x = 2$.

Et on a alors pour tous les points de cette droite : $\overrightarrow{MM'} : \begin{pmatrix} y - 1 - x \\ x + 3 - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
On trouve ce vecteur en prenant un point M quelconque de cette droite.
L'isométrie affine est donc la composée :

- de la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ d'équation $y - x = 2$ et,
- de la translation de vecteur $\overrightarrow{v} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Isométries affines de l'espace

On cherche d'abord les points fixes de l'isométrie affine.

3.1. Tous les points sont fixes

C'est l'identité ! C'est un déplacement.

3.2. Un plan fixe Π

C'est la symétrie orthogonale par rapport à ce plan, qui est un anti-déplacement. On dit aussi que c'est une réflexion. La matrice de φ dans la base orthonormale est symétrique.

3.3. Une droite fixe Δ

C'est une rotation d'axe Δ. L'angle est l'angle de l'isométrie vectorielle associée. Rappelons la nécessité d'orienter $\overrightarrow{\Delta}$, pour déterminer l'angle, c'est à dire simplement ici le signe du sinus. C'est un déplacement.

> Une rotation affine du plan est toujours un déplacement.
> Ains, dans l'espace, une symétrie par rapport à une droite est un déplacement, c'est aussi une rotation d'angle π ; tandis que dans le plan, une symétrie par rapport à une droite est un anti-déplacement.

3.4. Un seul point fixe Ω

- Dans le cas le plus simple, c'est la symétrie par rapport à Ω. L'isométrie vectorielle associée est l'opposé de l'identité. C'est un anti-déplacement.
- Sinon, l'isométrie vectorielle est la composée d'une rotation d'axe $\overrightarrow{\Delta}$ et de la symétrie orthogonale par rapport $\overrightarrow{\Pi}$ othogonal à $\overrightarrow{\Delta}$.

  On appelle Δ la droite $\left(\Omega, \overrightarrow{\Delta}\right)$ et Π le plan $\left(\Omega, \overrightarrow{\Pi}\right)$.

  L'isométrie affine est la composée de la rotation d'axe Δ et de même angle et de la symétrie orthogonale par rapport à Π. C'est un anti-déplacement.

3.5. Pas de points fixes

- Cela peut être une translation, qui est un déplacement.
- Cela peut être un vissage, composée d'une rotation et d'une translation dans la direction de l'axe. C'est un déplacement. L'isométrie vectorielle associée est une rotation vectorielle. Si l'angle est π, la matrice de φ dans une base orthonormale est symétrique.

  On trouve l'axe et le vecteur de la translation en cherchant les points M tels que $\overrightarrow{MM'} \,//\, \overrightarrow{u}$, avec $\overrightarrow{u}$, vecteur directeur de l'axe de la rotation vectorielle associée.

La figure 2, page suivante, montre bien que l'on peut inverser l'ordre de la rotation et de la translation.

- Sinon, l'isométrie vectorielle associée est une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel $\overrightarrow{\Pi}$. La matrice de φ, qui est une isométrie vectorielle, dans une base orthonormale, est d'ailleurs alors symétrique. On doit déjà s'en être aperçu !

  L'isométrie affine est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan Π de direction $\overrightarrow{\Pi}$ et d'une translation. On trouve Π et le vecteur de la translation en cherchant les points M tels que $\overrightarrow{MM'} \in \overrightarrow{\Pi}$.

  On appelle parfois cette transformation une **symétrie-glissée**. C'est un anti-déplacement.

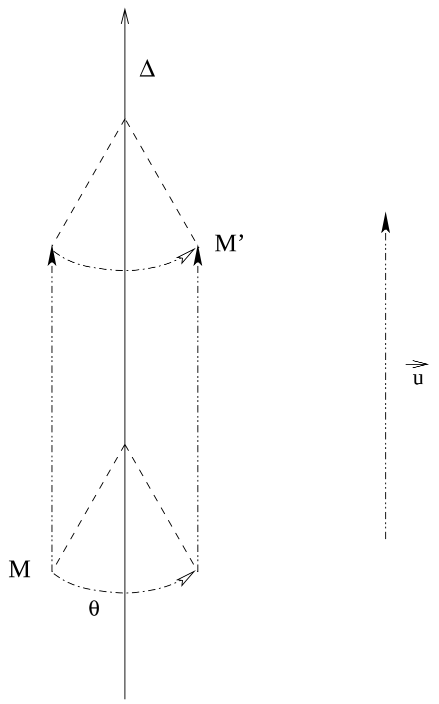

Figure 2 – ***Vissage***

3.6. Exemple

On va étudier la transformation donnée dans un repère orthonormal par : $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}\,(-2x - y + 2z) + 1 \\ y' = \dfrac{1}{3}\,(2x - 2y + z) + 1 \\ z' = \dfrac{1}{3}\,(x + 2y + 2z) + 3 \end{cases}$

L'application affine associée a pour matrice $\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{2}{3} & -\dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$ qui est bien une matrice orthogonale, donc une matrice d'isométrie.
Elle n'est pas symétrique, on n'a donc pas une symétrie orthogonale.
Le troisième vecteur est le produit vectoriel des deux premiers, c'est une isométrie directe.
L'isométrie vectorielle associée est donc une rotation vectorielle.
On a $1 + 2\cos\theta = -\dfrac{2}{3}$ en utilisant la trace, ce qui donne : $\cos\theta = -\dfrac{5}{6}$.

L'axe de cette rotation vectorielle est donné par les vecteurs invariants : $\begin{cases} -5x - y + 2z = 0 \\ 2x - 5y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$ ou encore, en éliminant les z des deux premières équation grace à la troisième : $\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$ et enfin : $\begin{cases} y = x \\ z = 3x \end{cases}$

Il s'agit de la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{u}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Pour savoir si l'angle de la rotation est $\pm$ arccos $\left(-\dfrac{5}{6}\right)$, il faut calculer le signe du déterminant $\begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{2}{3} & 1 \\ 0 & \dfrac{2}{3} & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{3} & 3 \end{vmatrix}$.

Ce signe est positif, donc l'isométrie vectorielle associée est donc la rotation d'axe dirigé par $\overrightarrow{u}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et d'angle arccos $\left(-\dfrac{5}{6}\right)$.

L'isométrie affine est donc soit une rotation affine, soit un vissage.

Pour le déterminer,il faut rechercher les points fixes : $\begin{cases} -5x - y + 2z + 3 = 0 \\ 2x - 5y + z + 3 = 0 \\ x + 2y - z + 9 = 0 \end{cases}$ ou encore, en éliminant les z des deux premières équation grace à la troisième : $\begin{cases} -3x + 3y + 21 = 0 \\ 3x - 3y + 12 = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$.

Ce système est incompatible, il n'y a pas de points fixes, c'est un vissage.

L'axe de ce vissage est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MM'} \, // \, \overrightarrow{u}$.

Ce qui donne $\begin{pmatrix} -5x - y + 2z + 3 \\ 2x - 5y + z + 3 \\ x + 2y - z + 9 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ équivalent au système : $\begin{cases} -5x - y + 2z = 2x - 5y + z \\ x + 2y - z = 3\,(2x - 5y + z) \end{cases}$

ou : $\begin{cases} -7x + 4y + z = 0 \\ -5x + 17y - 4z = 0 \end{cases}$ ou : $\begin{cases} -7x + 4y + z = 0 \\ -33x + 33y = 0 \end{cases}$ et enfin : $\begin{cases} y = x \\ z = 3x \end{cases}$

Il s'agit de la droite affine passant par l'origine et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

Le vecteur de la translation est : $\overrightarrow{OO'}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

L'isométrie affine est le vissage d'axe orienté Δ : $(O, \overrightarrow{u})$, d'angle arccos $\left(-\dfrac{5}{6}\right)$ et de vecteur de translation $\overrightarrow{u}$.

4. Décomposition en produit de réflexions

Théorème : Toute isométrie affine du plan et de l'espace se décompose en produit de réflexions.

Démonstration : Compte tenu des décompositions faites, il suffit de montrer qu'une translation et qu'une rotation se décompose en produit de réflexions. Bien sûr, il faudra traiter le cas où on travaille dans le plan et le cas où on travaille dans l'espace.

4.1. Dans le plan

a/ Décomposition d'une translation

Il suffit de prendre deux droites perpendiculaires à $\overrightarrow{u}$, Δ et Δ' telles que Δ' est translatée de Δ de $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{u}$.

Alors $T_{\overrightarrow{u}} = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$.
En effet, on note $M' = S_{\Delta}(M)$ et $M'' = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}(M)$. On note H et H' les projections de M sur Δ et Δ'. On a $\overrightarrow{HH'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{u}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM''} &= \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''}\\ &= 2\overrightarrow{HM'} + 2\overrightarrow{M'H'}\\ &= 2\overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{u}\end{aligned}$$

La figure 3, ci-dessous, illustre bien que : $\overrightarrow{MM''} = 2\,\overrightarrow{HH'}$

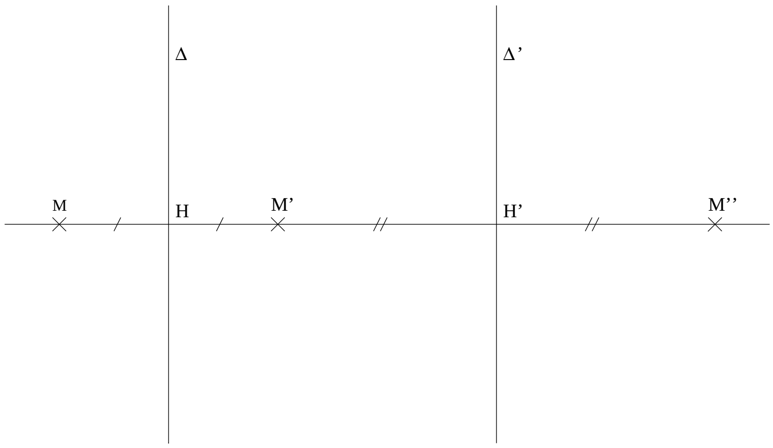

Figure 3 – ***Décomposition d'une translation en composée de réflexions :*** $MM'' = 2\,HH'$

b/ Décomposition d'une rotation de centre Ω et d'angle θ

Il suffit de prendre deux droites passant par Ω, Δ et Δ' telles que Δ' est Δ tournée de $\dfrac{1}{2}\theta$.
Alors $R_\theta = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$.
En effet, on note $M' = S_{\Delta}(M)$ et $M'' = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}(M)$.

$$\begin{aligned}\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M''}}\right) &= \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{\Omega M''}}\right)\\ &= 2\left(\widehat{\Delta,\overrightarrow{\Omega M'}}\right) + 2\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M'},\Delta'}\right)\\ &= 2\widehat{(\Delta,\Delta')} = \theta\end{aligned}$$

La figure 4, page suivante, illustre que : $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M''}}\right) = 2\widehat{(\Delta,\Delta')}$

4.2. Dans l'espace

a/ Décomposition d'une translation

Il suffit de prendre deux plans perpendiculaires à $\overrightarrow{u}$, Π et Π' telles que Π' est translatée de Π de $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{u}$.
Alors $T_{\overrightarrow{u}} = S_{\Pi'} \circ S_{\Pi}$

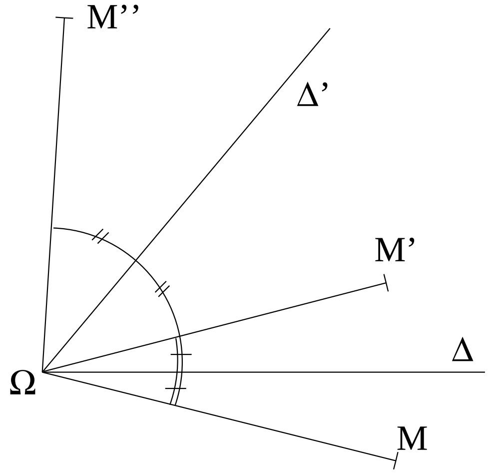

Figure 4 – ***Décomposition d'une rotation en composée de réflexions :*** $(\Omega M, \Omega M'') = 2\,(\Delta, \Delta')$

En effet, On note $M' = S_\Pi\,(M)$ et $M'' = S_{\Pi'} \circ S_\Pi\,(M)$. On note H et H' les projections de M sur Π et Π'. On a $\overrightarrow{HH'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{u}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM''} &= \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''}\\ &= 2\overrightarrow{HM'} + 2\overrightarrow{M'H'}\\ &= 2\overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{u}\end{aligned}$$

La figure est du même type que dans le plan.

b/ Décomposition d'une rotation d'axe Δ et d'angle θ

Il suffit de prendre deux plans contenant Δ, Π et Π' tels que Π' est Π tournée de $\dfrac{1}{2}\theta$ autour de Δ.
Alors $R_\theta = S_{\Pi'} \circ S_\Pi$.
En effet, on note $M' = S_\Pi\,(M)$ et $M'' = S_{\Pi'} \circ S_\Pi\,(M)$. On note encore Ω le point de Δ tel que $\overrightarrow{\Omega M} \perp \Delta$.

$$\begin{aligned}\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}}\right) &= \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M''}}\right)\\ &= 2\left(\widehat{\Pi, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) + 2\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M'}, \Pi'}\right)\\ &= 2(\widehat{\Pi, \Pi'}) = \theta\end{aligned}$$

La figure est du même type que dans le plan. ■