

## Sommaire

1. Réduction en dimension finie	1	4.2. Trace et Valeurs Propres . . . . .	7
1.1. Polynôme caractéristique . . . . .	1	4.3. Recherche d'une base trigonalisante . .	7
1.2. Ordre de multiplicité . . . . .	2	4.4. Cas d'un endomorphisme nilpotent . . .	8
2. Diagonalisation en dimension finie	3	5. Forme ultime en dimension 3	8
2.1. Diagonalisabilité . . . . .	3	5.1. Trois valeurs propres simples . . . . .	8
2.2. Polynôme scindé . . . . .	3	5.2. Une valeur propre simple et une double .	8
2.3. C.N.S. de diagonalisabilité . . . . .	4	5.3. Une valeur propre triple . . . . .	8
2.4. Matrice diagonale semblable . . . . .	4	6. Suites récurrentes linéaires	9
2.5. Diagonalisabilité et diagonalisation . . .	4	6.1. C'est un problème linéaire . . . . .	9
2.6. Matrice symétrique réelle . . . . .	5	6.2. Suites vérifiant $u_{n+1} - a u_n = b$ . . . . .	9
3. Recherche pratique	5	6.3. Suites vérifiant $u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n = c$ . .	10
3.1. Diagonalisabilité . . . . .	5	7. Puissances de matrices	11
3.2. Exemples . . . . .	5	7.1. Matrice diagonalisable . . . . .	11
3.3. Diagonalisation . . . . .	5	7.2. Avec une matrice nilpotente . . . . .	11
3.4. Exemples . . . . .	6	7.3. Polynôme annulateur . . . . .	12
4. Cas non diagonalisable	7	8. Compléments	13
4.1. Trigonalisation . . . . .	7	8.1. Colbert, lycée numérique . . . . .	13
		8.2. Les mathématiciens du chapitre . . . . .	14

Le but de ce chapitre est, pour un endomorphisme donné, de rechercher une base dans laquelle son expression sera la plus « simple » possible ou de rechercher les conditions que doit vérifier une telle base.

Pour une matrice donnée  $A$ , le but est de trouver une matrice semblable à  $A$  qui soit la plus « simple » possible.

## 1. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie, d'une matrice

$E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) de dimension  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ .

$\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .  $A$  est la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

En pratique, on travaille le plus souvent avec une matrice carrée  $A$ , au besoin en la considérant comme la matrice dans la base canonique d'un endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$ .

### 1.1. Polynôme caractéristique

On rappelle que le déterminant d'un endomorphisme est celui de sa matrice dans une base quelconque, ce qui donne du sens à la définition suivante :

**Définition :** On appelle polynôme caractéristique de  $\varphi$ , ou de  $A$ , le déterminant de  $\varphi - \lambda \text{Id}_E$ , ou de  $A - \lambda I_n$ , noté :

$$P_\varphi(\lambda) = \det(\varphi - \lambda \text{Id}_E) = P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

**Théorème :**  $P_\varphi(\lambda) = P_A(\lambda)$  est un polynôme de degré  $n$  en  $\lambda$ .

Son terme de plus haut degré est  $(-1)^n \lambda^n$ .

Son terme constant est  $\det(\varphi) = \det(A)$ .

En pratique, il se calcule par  $P_\varphi(\lambda) = P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$  où  $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$  et  $I_n$  est la matrice identité.

De plus, si le polynôme caractéristique  $P_A(\lambda)$  est scindé, la somme de ses racines est la trace de  $A$ .

**Démonstration :**  $A - \lambda.I_n$  est la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  de  $\varphi - \lambda.Id_E$  et comme un déterminant se calcule dans n'importe quelle base, on a  $P_\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda.I_n)$ .

$$P_\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{1,1} - \lambda)\Delta_{1,1} - a_{2,1}\Delta_{2,1} + \dots + (-1)^{n+1} a_{n,1}\Delta_{n,1}$$

Par récurrence,  $-a_{2,1}\Delta_{2,1} + \dots + (-1)^{n+1} a_{n,1}\Delta_{n,1}$  ne peut contenir de terme en  $\lambda^n$ , donc le terme de plus haut degré est celui de  $(a_{1,1} - \lambda)\Delta_{1,1}$ , c'est à dire celui de  $-\lambda\Delta_{1,1}$ . Par récurrence, c'est donc  $(-1)^n \lambda^n$ . Enfin,  $\lambda = 0$  fournit le terme constant  $P_\varphi(0) = \det(\varphi - 0.Id_E) = \det(\varphi)$ . ■

**Théorème :** Les racines sur  $\mathbb{K}$  de  $P_\varphi(\lambda) = P_A(\lambda)$  sont **exactement** « les » valeurs propres de  $\varphi$  ou de  $A$ .

**Démonstration :** Si  $\lambda_i$  est valeur propre de  $\varphi$ ,  $(\varphi - \lambda_i.Id_E)$  n'est pas injective, donc n'est pas un isomorphisme et donc son déterminant est nul.

Réciproquement, si  $\det(\varphi - \lambda_i.Id_E) = 0$ ,  $(\varphi - \lambda_i.Id_E)$  n'est pas injective,  $\ker(\varphi - \lambda_i.Id_E) \neq \{0\}$  et donc  $\lambda_i$  est valeur propre de  $\varphi$ . ■

**Théorème :** Si la matrice d'un endomorphisme dans une certaine base est triangulaire, les valeurs propres de cet endomorphisme sont les termes de la diagonale de cette matrice.

**Démonstration :**  $\det(A - \lambda.I_n)$  est alors le produit des éléments diagonaux, car cette matrice est toujours triangulaire. Les racines de ce polynôme en  $\lambda$  sont bien les éléments de la diagonale de  $A$ . ■

**Théorème :** Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

**Démonstration :** Si  $B = P^{-1}AP$ , alors :

$$\det(B - \lambda.I_n) = \det(P^{-1}AP - \lambda.I_n) = \det(P^{-1}(A - \lambda.I_n)P) = \det(A - \lambda.I_n) \quad \blacksquare$$

## 1.2. Ordre de multiplicité des valeurs propres, dimension des sous espaces propres

**Définition :** L'ordre de multiplicité de  $\lambda_i$  racine de  $P_\varphi(\lambda) = P_A(\lambda)$  est l'ordre de multiplicité de  $\lambda_i$  valeur propre de  $\varphi$  ou de  $A$ .

On parle donc de valeur propre simple, double, multiple...

Chaque valeur propre est toujours donnée avec son ordre de multiplicité.

**Théorème :** Pour  $\lambda_i$  valeur propre de  $\varphi$  ou de  $A$ ,

$$1 \leq \dim E_{\lambda_i} \leq \text{Ordre de multiplicité de la valeur propre } \lambda_i$$

**Démonstration :** Comme  $\lambda_i$  est valeur propre de  $\varphi$ ,  $\dim E_{\lambda_i} \geq 1$ .

Soit  $p = \dim E_{\lambda_i}$  et  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  une base de  $E_{\lambda_i}$  qu'on complète par  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$  en une base de  $E$ .

Dans cette base,  $\varphi$  a pour matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 & a_{1,p+1} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_i & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & a_{p+1,p+1} & \dots & a_{p+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n,p+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{d'où}$$

$$P_\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda_i - \lambda & 0 & \dots & 0 & a_{1,p+1} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_i - \lambda & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & a_{p+1,p+1} - \lambda & \dots & a_{p+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n,p+1} & \dots & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda_i - \lambda)^p \begin{vmatrix} a_{p+1,p+1} - \lambda & \dots & a_{p+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,p+1} & \dots & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix}$$

en remarquant par exemple que la matrice est triangulaire par blocs. Ceci prouve que  $\lambda_i$  est racine de  $P_\varphi(\lambda)$  d'ordre au moins  $p$ . ■

Si  $\lambda_i$  est une valeur propre simple, alors  $\dim E_{\lambda_i} = 1$

## 2. Diagonalisation d'un endomorphisme en dimension finie, d'une matrice

### 2.1. Diagonalisabilité

**Définition :** Un endomorphisme  $\varphi$  de  $E$  est diagonalisable  
 $\Leftrightarrow E$  possède une base formée de vecteurs propres de  $\varphi$   
 $\Leftrightarrow$  la matrice  $A$  est diagonalisable.

Dans une base de vecteurs propres, la matrice de  $\varphi$  est diagonale. Les valeurs propres se trouvent sur la diagonale, chacune autant de fois que son ordre de multiplicité.  $A$  est donc **semblable** à une matrice diagonale.

### 2.2. Polynôme scindé

**Définition :** Un polynôme scindé est un polynôme qui peut se factoriser en produit d'expressions du 1<sup>er</sup> degré.

- $X^2 + 2X + 1 = (X + 1)(X + 1)$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  comme sur  $\mathbb{C}$ ,
- $X^2 + X + 1 = (X + j)(X + j^2)$  est scindé sur  $\mathbb{C}$  mais pas sur  $\mathbb{R}$ .

En particulier, sur  $\mathbb{C}$ , tous les polynômes sont scindés.

### 2.3. Condition Nécessaire et Suffisante de diagonalisabilité

**Théorème :**  $E$  de dimension  $n$ ,  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\varphi$  est diagonalisable  
 $\Leftrightarrow$  la somme des dimensions des sous espaces propres est  $n$   
 $\Leftrightarrow A$  est diagonalisable.

La démonstration est admise.

**Théorème :** (Condition Nécessaire et Suffisante)

$\varphi$ , ou  $A$  est diagonalisable  $\Leftrightarrow \begin{cases} P_\varphi(\lambda) = P_A(\lambda) \text{ est scindé et,} \\ \text{Pour chaque } \lambda_i \text{ multiple, } \dim E_{\lambda_i} = \text{ordre de multiplicité de } \lambda_i \end{cases}$

**Théorème :** (Condition Suffisante)

Si  $\varphi$ , ou  $A$ , admet  $n$  valeurs propres distinctes, alors  $\varphi$ , ou  $A$ , est diagonalisable.

**Démonstration :** Toutes les valeurs propres sont simples, chaque sous espace propre est donc de dimension 1... ■

Dans le cas où l'endomorphisme est diagonalisable, on obtient une base de vecteurs propres en mettant bout à bout une base de chaque sous espace propre.

### 2.4. Matrice diagonale semblable

**Théorème :** Si  $A$  est diagonalisable, de valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  distinctes ou confondues, de vecteurs propres associés  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . On appelle  $P$  la matrice de passage constituée en colonnes, et dans cet ordre, des coordonnées de  $e_1, e_2, \dots, e_n$  écrits dans la base d'origine. Alors

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On ne suivra la méthode donnée que si  $n$  est « petit » et quand l'énoncé ne guide pas vers une autre.

$A$  est ici diagonalisable, mais **n'est pas** diagonale, c'est  $D$  qui est diagonale...

### 2.5. Diagonalisabilité et diagonalisation

Quand une matrice  $A$  est **diagonalisable**, une erreur courante est de dire que, *dans une certaine base*,  $A$  est diagonale, ce qui est bien sûr grossièrement faux et même stupide.

On a simplement une matrice de passage  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que :  $A = PDP^{-1}$ , ou bien,  $D = P^{-1}AP$ .

La confusion provient de ce que  $A$  et  $D$  sont les matrices d'un **même** endomorphisme dans deux bases différentes...

Il est par contre exact de dire que si un endomorphisme  $\varphi$  est diagonalisable, et s'il est de matrice  $A$  dans la base  $\mathcal{B}$ , il existe une base  $\mathcal{B}'$  dans laquelle la matrice de  $\varphi$  est  $D$ , diagonale.  $P$  étant la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{B}'$ , on a alors :  $A = PDP^{-1}$  et  $D = P^{-1}AP$ .

## 2.6. Matrice symétrique réelle

**Théorème :** Une matrice **symétrique réelle** est diagonalisable avec, au besoin, une matrice de passage orthogonale.

Ce théorème, très utile en pratique, n'est ici que pour mémoire, on se reportera au chapitre suivant.

## 3. Recherche pratique

### 3.1. Diagonalisabilité

- On calcule  $P_A(\lambda)$ .
  - Si  $P_A(\lambda)$  n'est pas scindé (on est donc sur  $\mathbb{R}$ ),  $A$  n'est pas diagonalisable. On a terminé. On peut au besoin continuer sur  $\mathbb{C}$ .
- On factorise  $P_A(\lambda)$ , en particulier, on cherche les valeurs propres multiples.
  - S'il n'y en a pas,  $A$  est diagonalisable. On a terminé.
 On cherche la dimension de chaque sous espace propre associé à une valeur propre multiple.  
 On utilisera parfois  $\dim E_{\lambda_i} = n - \text{rang}(A - \lambda_i I_n)$ .
  - Si chaque dimension est l'ordre de multiplicité de la valeur propre,  $A$  est diagonalisable. On a terminé.
  - Sinon,  $A$  n'est pas diagonalisable. On a terminé.

### 3.2. Exemples

- $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  Son polynôme caractéristique est :  $4\lambda^2 + 1$  qui n'a pas de racines réelles, et donc, cette matrice n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .
- $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  n'est pas diagonalisable. En effet, 2 est valeur propre double et le sous-espace propre est de dimension 1.  
 En effet,  $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  est de rang 1 et donc  $E_2$  est de dimension  $2 - 1 = 1 \neq 2$ .

### 3.3. Diagonalisation

Dans ce paragraphe, on supposera que  $A$  est effectivement diagonalisable.

La méthode la **plus souvent utilisée** consiste à :

- calculer  $P_A(\lambda)$  ;
- factoriser  $P_A(\lambda)$ , chercher les valeurs propres ;
- pour chaque valeur propre, chercher une base du sous espace propre associé ;
- on obtient une base de vecteurs propres en mettant bout à bout les différentes bases des sous espaces propres.

Sinon, on peut aussi parfois revenir à la définition en cherchant les couples valeur propre, vecteur propre.

### 3.4. Exemples

On va diagonaliser la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$  avec  $n \geq 3$ .

Cette matrice est symétrique réelle, donc diagonalisable.

#### a/ Première méthode

On utilise ici une méthode très particulière, applicable seulement quand le rang de  $A$  est petit. La matrice est clairement de rang 2, 0 est donc valeur propre d'ordre exactement  $n-2$  compte tenu de la diagonalisabilité.

Le sous-espace propre, qui est le noyau, est facile à déterminer, il est défini par  $\begin{cases} x_n = 0 \\ x_1 + \cdots + x_{n-1} = 0 \end{cases}$

Il ne nous manque que la ou les deux valeurs propres non nulles. Compte tenu de la trace nulle, ce sont deux valeurs propres opposées.

On cherche les vecteurs  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  tels que  $AX = \lambda X$ , avec  $\lambda \neq 0$ ,

$$\text{ce qui donne } \begin{cases} x_n = \lambda x_1 \\ x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 + \cdots + x_{n-1} = \lambda x_n \end{cases} \quad \text{ou encore } \begin{cases} x_n = \lambda x_1 \\ x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \\ (n-1)x_1 = \lambda^2 x_1 \end{cases}$$

On utilise alors cette dernière équation.  $x_1 = 0$  entraîne  $X = 0$  ce qui est impossible.

On a donc  $\lambda = \pm\sqrt{n-1}$  qui sont les deux autres valeurs propres.

Les sous-espaces propres correspondants sont engendrés par  $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ .

#### b/ Deuxième méthode

On va plus classiquement chercher le polynôme caractéristique.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}_n = -\lambda \Delta_{n-1} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

Finalement,  $\Delta_n = -\lambda \Delta_{n-1} - (-\lambda)^{n-2}$ , en développant selon la première ligne puis le déterminant restant selon la première colonne.

On obtient alors  $\Delta_n = (-1)^n (\lambda^n - (n-1)\lambda^{n-2})$  par simple récurrence facile à obtenir. Ce qui fournit bien sûr les mêmes valeurs propres qu'avec la méthode précédente.

Il ne reste qu'à chercher les sous-espaces propres correspondants.

## 4. Réduction d'un endomorphisme non diagonalisable

### 4.1. Trigonalisation

**Théorème :**  $E$  de dimension  $n$ ,  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ , tel que le polynôme caractéristique de  $\varphi$  est scindé, alors il existe une base où la matrice de  $\varphi$  est triangulaire.

Les valeurs propres se trouvent sur la diagonale, chacune autant de fois que son ordre de multiplicité.

**Théorème :**  $A$  une matrice carrée telle que le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé, alors il existe une matrice triangulaire  $T$  semblable à  $A$ .

Les valeurs propres se trouvent sur la diagonale, chacune autant de fois que son ordre de multiplicité.

La démonstration de ces deux théorèmes est admise.

### 4.2. Trace et Valeurs Propres

La trace d'un endomorphisme est la somme des éléments diagonaux de sa matrice dans une base quelconque. Ce qui nous donne :

**Théorème :** Quand le polynôme caractéristique est scindé, la trace d'un endomorphisme, qui est la somme des éléments diagonaux de sa matrice dans une base quelconque, est égale à la somme de ses valeurs propres, chacune comptée autant de fois que son ordre de multiplicité.

On peut toujours appliquer ce théorème en considérant les racines réelles et complexes du polynôme caractéristique.

**Démonstration :** Il suffit de se placer dans une base où la matrice est triangulaire. Les valeurs propres sont alors sur la diagonale. ■

Ceci permet souvent de vérifier la cohérence des calculs de valeurs propres...

On fera **systématiquement** cette vérification après la recherche des valeurs propres d'une matrice.

### 4.3. Recherche d'une base trigonalisante

On va travailler sur un exemple courant :

$E$  est de dimension 3,  $\lambda_1$  est valeur propre simple,  $\lambda_2$  valeur propre double de  $\varphi$ , ou de  $A$ .

De plus  $\dim E_{\lambda_1} = \dim E_{\lambda_2} = 1$ .  $\varphi$  n'est donc pas diagonalisable mais est trigonalisable.

En principe, dans une telle recherche, l'énoncé doit vous guider. Ici,

- On cherche  $e_1$  base de  $E_{\lambda_1}$
- On cherche  $e_2$  base de  $E_{\lambda_2}$
- On cherche  $e_3$  tel que  $(\varphi - \lambda_2 \cdot Id_E)(e_3) = e_2$
- On vérifie que  $(e_1, e_2, e_3)$  est bien une base de  $E$

Dans cette base, la matrice de  $\varphi$  est 
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

#### 4.4. Triangularisation d'un endomorphisme ou d'une matrice nilpotents

Rappelons qu'une matrice  $A$  est nilpotente si et seulement si il existe  $p$  tel que  $A^p = 0$ . On a la même définition pour un endomorphisme nilpotent.

Si  $X$  est un vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $\lambda$ , alors il est aussi vecteur propre de  $A^p$  pour la valeur propre  $\lambda^p$ .

Que l'on travaille sur  $\mathbb{C}$  ou sur  $\mathbb{R}$ , le polynôme caractéristique est scindé et l'unique valeur propre est nulle.

$A$  est donc semblable à une matrice strictement triangulaire.

On peut même montrer que  $A$  est semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où les  $\varepsilon_i$  valent 0 ou 1. Mais ceci est hors-programme...

### 5. Forme ultime en dimension 3

On considère ici un endomorphisme en dimension 3 dont le **polynôme caractéristique est scindé**.

On va décrire la **meilleure** forme que peut avoir sa matrice dans une certaine base, selon les ordres de multiplicité des valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.

#### 5.1. Trois valeurs propres simples

L'endomorphisme est diagonalisable et a pour matrice  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$  dans une base bien choisie.

#### 5.2. Deux valeurs propres, une simple et une double

- Si l'endomorphisme est diagonalisable, il a pour matrice  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$  dans une base bien choisie.

- Si l'endomorphisme n'est pas diagonalisable, il a pour matrice  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$  dans une base bien choisie. On constitue cette base comme dans l'exemple étudié au paragraphe 4.3..

#### 5.3. Une valeur propre triple

- Si l'endomorphisme est diagonalisable, il a pour matrice  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$  dans une base bien choisie.

C'est l'homothétie de rapport  $\lambda$ . L'endomorphisme a d'ailleurs cette matrice dans n'importe quelle base ...



- Si l'endomorphisme n'est pas diagonalisable, il a pour matrice  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$  si le sous-espace propre

est de dimension 2 ou  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$  si le sous-espace propre est de dimension 1, toujours dans une

base bien choisie.

Ici, l'énoncé doit vous guider dans la recherche de cette base.

## 6. Suites récurrentes linéaires

### 6.1. C'est un problème linéaire

Le but est de déterminer toutes les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{K} \quad (1)$$

On considère E l'espace vectoriel des suites sur  $\mathbb{K}$ , et

$$\varphi : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto (a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

$\varphi$  est clairement linéaire. Il s'agit de résoudre

$$\varphi((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (d)_{n \in \mathbb{N}}$$

où  $(d)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite constante. On se retrouve donc face à une équation linéaire.

On va donc chercher les solutions de l'équation homogène associée :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0$$

Ces solutions forment un sous espace vectoriel de E.

Il suffira d'ajouter une suite qui est solution particulière de (1).

### 6.2. Suites vérifiant $u_{n+1} - a u_n = b$

a/  $u_{n+1} - a u_n = 0$

Ce sont les suites géométriques de raison  $a$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n u_0$ .

b/  $u_{n+1} - a u_n = b$

On cherche d'abord une solution particulière sous forme de suite constante  $v_n = k$ , ce qui donne  $(1-a)k = b$ .

- Si  $a \neq 1$ , on trouve  $k = \frac{b}{1-a}$ , et donc  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n \alpha + \frac{b}{1-a}$  où  $\alpha$  s'exprime en fonction des conditions initiales :  $\alpha = u_0 - \frac{b}{1-a}$ .

- Si  $a = 1$ , la suite est arithmétique,  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nb$

Une fois qu'on a l'expression générale de la solution, on tient compte des conditions initiales éventuelles.

### 6.3. Suites vérifiant $u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n = c$

a/  $u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n = 0$

On écrit matriciellement : 
$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de  $\begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est :  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ .

Ce qui nous donne, en travaillant sur  $\mathbb{C}$  :

- quand cette matrice est diagonalisable ( $\Delta \neq 0$ ) : 
$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

On obtient alors facilement : 
$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

Et finalement :  $u_n = K \lambda_1^n + L \lambda_2^n$ .

- quand elle n'est pas diagonalisable ( $\Delta = 0$ ) : 
$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

On obtient alors facilement : 
$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda^n & n \lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

Et finalement :  $u_n = K \lambda^n + L n \lambda^n$ .

Dans tous les cas, K et L dépendent de  $u_0$  et  $u_1$ .

#### Théorème :

L'ensemble des suites vérifiant  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n = 0$ , est un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension 2.

L'équation caractéristique est :  $r^2 + ar + b = 0$  qu'on résout.

- $\Delta \neq 0$  sur  $\mathbb{C}$ , ou  $\Delta > 0$  sur  $\mathbb{R}$  : il y a 2 racines distinctes  $r_1, r_2$ .

L'ensemble des solutions est donné par :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\alpha r_1^n + \beta r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

- $\Delta = 0$  sur  $\mathbb{C}$ , ou sur  $\mathbb{R}$  : il y a 1 racine double  $r$ .

L'ensemble des solutions est alors :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\alpha r^n + \beta n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

- $\Delta < 0$  sur  $\mathbb{R}$  : il n'y a pas de racines réelles.

On résout alors l'équation caractéristique sur  $\mathbb{C}$ , on a :  $r_2 = \overline{r_1}$ .

De plus :  $r_1 = |r| e^{i\theta}$ , et  $r_2 = |r| e^{-i\theta}$

Les solutions sur  $\mathbb{R}$  sont alors :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\alpha |r|^n \cos n\theta + \beta |r|^n \sin n\theta)_{n \in \mathbb{N}}$$

**Démonstration :** La structure d'espace vectoriel est donnée par le fait que c'est le noyau d'une application linéaire.

Le changement de notation est du au fait qu'on trouve des suites géométriques, dont la raison  $r$  est une valeur propre de la matrice  $\begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

La seule chose qui reste à démontrer concerne le cas réel avec  $\Delta < 0$ .

On observe que :  $(|r|^n e^{in\theta})$  et  $(|r|^n e^{-in\theta})$  sont solution sur  $\mathbb{C}$ .

Ce qui fait que  $(|r|^n \cos n\theta)$  et  $(|r|^n \sin n\theta)$  sont solution sur  $\mathbb{C}$  par combinaison linéaire de ces solutions. Mais ces solutions sont réelles et donc **aussi** solution sur  $\mathbb{R}$  ! Elles forment clairement une famille libre sur  $\mathbb{C}$  comme sur  $\mathbb{R}$  et forment donc une base de l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{C}$  comme sur  $\mathbb{R}$ . ■

$$b/ \quad u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n = c$$

On cherche donc une solution particulière sous la forme...

- une suite constante  $u_n = k$

On obtient  $k(1 + a + b) = c$ , on a donc une solution quand  $1 + a + b \neq 0$ .

- quand  $(1 + a + b = 0)$ , on cherche une suite arithmétique  $u_n = k n$

On obtient  $k((n+2) + (n+1)a + n b) = c$ , d'où  $k(2 + a) = c$ , on a donc une solution quand  $2 + a \neq 0$ .

- quand on a à la fois :  $\left\{ \begin{array}{l} 1 + a + b = 0 \\ 2 + a = 0 \end{array} \right.$ , on cherche une suite  $u_n = k n^2$

On obtient  $k((n+2)^2 + (n+1)^2 a + n^2 b) = c$ , d'où  $k(4 + a) = c$  et donc  $2k = c$ . On a donc toujours une solution.

Une fois qu'on a l'expression générale de la solution, on tient compte des conditions initiales éventuelles.

## 7. Puissances de matrices

Un problème courant est de calculer la puissance  $m^{\text{ème}}$  d'une matrice. Même si l'énoncé doit vous guider, on passe ici en revue quelques cas habituels.

### 7.1. Matrice diagonalisable

On a :

$$D = P^{-1}AP$$

et donc :

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

et par récurrence très facile :

$$A^m = PD^mP^{-1}$$

$$\text{de plus, si } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ alors } D^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

Il ne reste « qu'un calcul » de produit de 3 matrices pour terminer, à savoir :  $A^m = PD^mP^{-1}$ .

### 7.2. Utilisation d'une matrice dont une puissance est nulle

Si  $A = (B + C)$ , avec  $BC = CB$ , alors  $A^m = \sum_{k=0}^m C_m^k B^{m-k} C^k$  par la formule du binôme.

Si, de plus, par exemple,  $C^3 = 0$ , alors  $A^m = \sum_{k=0}^2 C_m^k B^{m-k} C^k$  car tous les autres termes sont nuls.

Comme enfin, dans ce cas, on connaît les puissances de  $B$  (qui est le plus souvent diagonale...). Heureusement que l'énoncé vous guide.

Il arrive qu'on utilise une combinaison des deux méthodes précédentes quand la matrice est simplement trigonalisable.

$$\text{Si } A \text{ est semblable à } A' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La puissance  $m^{\text{ème}}$  de la première matrice est facile à obtenir, la deuxième est bien nilpotente et elles commutent... On calcule donc  $(A')^m$  selon la deuxième méthode puis  $A^m$  avec la matrice de passage.

### 7.3. Utilisation d'un polynôme annulateur

Supposons par exemple que

$$A^2 - 3A + 2I_n = 0$$

On va montrer deux façons classiques de procéder.

- Par division euclidienne de polynômes

On factorise

$$X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$$

Par simple division euclidienne, on écrit :

$$X^m = Q(X)(X - 1)(X - 2) + aX + b$$

Comme on ne s'intéresse pas au quotient, on pose alors successivement  $X = 1$  puis  $X = 2$ .

$$\text{Ce qui donne } \begin{cases} 1 = a + b \\ 2^m = 2a + b \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} a = 2^m - 1 \\ b = 2 - 2^m \end{cases} \text{ et enfin}$$

$$A^m = (2^m - 1)A + (2 - 2^m)I_n$$

Cette méthode est intéressante quand le degré du polynôme annulateur est petit. Elle est applicable quelle que soit la dimension de la matrice  $A$ .

- Par suites récurrentes linéaires

On a :

$$A^2 = 3A - 2I_n$$

$$A^3 = 3A^2 - 2A$$

$$= 3(3A - 2I_n) - 2A$$

$$= 7A - 6I_n$$

Par récurrence immédiate, les puissances de  $A$  sont donc combinaison linéaire de  $A$  et de  $I$  :

$$A^m = a_m A + b_m I_n$$

On écrit alors  $A^{m+1}$  de 2 façons :

$$A^{m+1} = a_m A^2 + b_m A$$

$$= a_m (3A - 2I_n) + b_m A$$

$$= (3a_m + b_m)A - 2a_m I_n$$

$$= a_{m+1} A + b_{m+1} I_n$$

Ce qui donne :

$$a_{m+1} = 3a_m + b_m$$

$$b_{m+1} = -2a_m$$

Ou encore :

$$a_{m+2} = 3a_{m+1} - 2a_m$$

Il ne reste qu'à rechercher, en tenant compte des conditions initiales, cette suite récurrente linéaire.

## 8. Compléments

### 8.1. Colbert, lycée numérique

#### a/ Maple

Comme pour tout l'algèbre linéaire, il faut d'abord charger le pack `linalg` :

```
> with(linalg);
> charpoly(A, lambda); calcule le polynôme caractéristique de A de variable λ.
> eigenvals(A); fournit les valeurs propres d'une matrice et
> eigenvects(A); fournit les valeurs propres et une base de chaque sous espace propre. Dans la mesure, bien sûr, où Maple sait résoudre l'équation qui permet de calculer les valeurs propres...
On aura parfois intérêt à voir les racines du polynôme caractéristique de A par :
```

```
> solve(charpoly(A, lambda), lambda);
```

De plus, comme toujours, on se méfiera des cas particuliers quand il y a des paramètres...

Pour les suites récurrentes linéaires, comme pour tout l'algèbre linéaire, il faut d'abord avoir aussi chargé le pack `linalg`.

C'est ensuite `rsolve` qui permet de rechercher ces suites. Donnons un exemple :

```
> rsolve(u(n)=-3*u(n-1)-2*u(n-2), u);
```

#### b/ HP 40G-40GS

Dans ce même sous-menu, on trouve `EIGENVAL` et `EIGENVV` pour les valeurs propres et les couples valeurs et vecteurs propres. Rappelons que sur cette machine, les matrices sont uniquement numériques...

Si on choisit l'`APLET` (L3C2), `SEQUENCE`, on peut chercher les valeurs (numériques) des termes d'une suite récurrente entrée dans l'environnement symbolique, `SYMB` (L2C1).

#### c/ HP 50G

Dans le menu `MATRICES`, L8C3, l'entrée `EIGENVECTORS` propose `EGVL` et `EGV` pour les valeurs propres et les couples valeurs et vecteurs propres.

Il est parfois nécessaire de passer en mode de calcul approché du `CAS` pour trouver des valeurs approchées des éléments propres d'une matrice.

Mais il propose aussi `PCAR` pour le polynôme caractéristique et `JORDAN` pour la réduite de Jordan, une trigonalisation particulière.

Ces commandes fonctionnent également avec les matrices à paramètre, du moment que la calculatrice arrive à factoriser le polynôme caractéristique. La meilleure calculatrice sur le sujet.

Pour les suites récurrentes, il faut ici définir une fonction avec `DEF`, L9C3, et utiliser la fonction `IFTH`, If-Then-Else, du menu `CAT`, L4C4, pour donner les premières valeurs...

#### d/ TI 89

La résolution des systèmes linéaires se fait par `Simult` du menu `MATH`, L8C3, sous-menu `Matrix`.

Dans ce même sous-menu, la commande `eigVc` donne les vecteurs propres et `eigVl` les valeurs propres. Malheureusement, c'est ici toujours un calcul numérique approché, valable uniquement pour une matrice numérique !

Pour travailler avec des matrices dépendant d'un paramètre ou pour obtenir les valeurs propres exactes ou le polynôme caractéristique, il faut calculer le déterminant de notre matrice moins  $x$  fois la matrice identité, par la commande `identit`, toujours dans le même sous-menu. On calcule les zéros de ce polynôme, puis on résout, pour chaque valeur propre le système linéaire correspondant.

Les sous-espaces propres s'obtiennent alors en résolvant les système correspondant avec la commande `RREF` appliqué à notre matrice moins le bon nombre de fois l'identité. On obtient alors la matrice du

système dont les solutions forment le sous-espace propre. Ceci est à faire valeur propre par valeur propre !

Placer le mode graphique sur **SEQUENCE** via la touche **MODE** permet de faire des graphiques de suites, et aussi d'avoir les valeurs numériques des premiers termes en restant avec les axes **TIME**

#### e/ TI N-inspire CAS

La résolution des systèmes linéaires se fait par **Simult**.

La commande **eigVc** donne les vecteurs propres et **eigVl** les valeurs propres.

Malheureusement, c'est ici toujours un calcul numérique approché, valable uniquement pour une matrice numérique !

Pour travailler avec des matrices dépendant d'un paramètre ou pour obtenir les valeurs propres exactes ou le polynôme caractéristique, il faut calculer le déterminant de notre matrice moins  $x$  fois la matrice identité, par la commande **identit**y, toujours dans le même sous-menu. On calcule les zéros de ce polynôme, puis on résout, pour chaque valeur propre le système linéaire correspondant.

Les sous-espaces propres s'obtiennent alors en résolvant les système correspondant avec la commande **rref** appliqué à notre matrice moins le bon nombre de fois l'identité. On obtient alors la matrice du système dont les solutions forment le sous-espace propre. Ceci est à faire valeur propre par valeur propre !

#### f/ ClassPad 300

Dans le menu **Action**, le sous menu **Matrix-Calculation** fournit la commande **rref** qui permet de résoudre un système linéaire.

Toujours au même endroit, les commandes **eigVl** et **eigVc** fournissent les valeurs et vecteurs propres (numériques).

Si on n'a pas les valeurs exactes des valeurs propres, il faut procéder comme avec la TI.

## 8.2. Les mathématiciens du chapitre

**Cayley Arthur 1821-1895** On doit à cet anglais de nombreux travaux sur les matrices, la diagonalisation, la notion de polynôme caractéristique... et le très fameux théorème de Cayley-Hamilton qui n'est pas à notre programme.