

## Sommaire

<b>1.</b>	<b>Produit Scalaire sur <math>E</math></b>	<b>1</b>		<b>4.</b>	<b>Espaces Vectoriels Euclidiens</b>	<b>9</b>
1.1.	Forme bilinéaire symétrique sur $E$ . . . .	1		4.1.	Prod. scal. dans une base orthonormale . . . . .	9
1.2.	Forme quadratique associée . . . . .	1		4.2.	Matrice d'une forme bilinéaire . . . . .	9
1.3.	Forme quadratique définie positive . . . .	2		4.3.	Endomorphisme orthogonal . . . . .	10
1.4.	Produit Scalaire sur $E$ . . . . .	2		4.4.	Matrice orthogonale . . . . .	11
1.5.	Exemples classiques . . . . .	3		<b>5.</b>	<b>Isométries Vectorielles</b>	<b>11</b>
1.6.	Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . . .	4		5.1.	Symétries orthogonales . . . . .	11
<b>2.</b>	<b>Norme dérivant d'un produit scalaire</b>	<b>4</b>		5.2.	Isométries vectorielles du plan . . . . .	12
2.1.	Norme sur $E$ . . . . .	4		5.3.	Isométries vectorielles de l'espace . . . . .	12
2.2.	Norme dérivant d'un produit scalaire . . . .	4		5.4.	Rotations vectorielles de l'espace . . . . .	14
2.3.	Théorème de Pythagore . . . . .	5		<b>6.</b>	<b>Endomorphismes Symétriques</b>	<b>15</b>
<b>3.</b>	<b>Orthogonalité, Orthonormalité</b>	<b>5</b>		6.1.	Endomorphismes symétriques . . . . .	15
3.1.	Orthogonalité . . . . .	5		6.2.	Réduction dans une base orthonormale . . . . .	16
3.2.	Orthogonal d'une partie . . . . .	5		6.3.	Réduction en dimension 3 . . . . .	16
3.3.	Famille orthogonale, orthonormale . . . .	6		6.4.	Identification d'une conique . . . . .	16
3.4.	Théorème et procédé de Schmidt . . . . .	6		6.5.	Petits rappels sur les coniques . . . . .	17
3.5.	Projection orthogonale . . . . .	7		<b>7.</b>	<b>Compléments</b>	<b>19</b>
				7.1.	Avec Maple . . . . .	19
				7.2.	Les mathématiciens du chapitre . . . . .	19

Dans tout le chapitre,  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

### 1. Produit Scalaire sur $E$

#### 1.1. Forme bilinéaire symétrique sur $E$

**Définition :** Soit  $\Psi : \begin{cases} E \times E \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \mapsto \Psi(u, v) \end{cases}$

On dit que  $\Psi$  est **bilinéaire symétrique** sur  $E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall u \in E, \quad \Psi_u : v \rightarrow \Psi_u(v) = \Psi(u, v) \text{ est linéaire} \\ \forall v \in E, \quad \Psi_v : u \rightarrow \Psi_v(u) = \Psi(u, v) \text{ est linéaire} \\ \forall u, v \in E, \quad \Psi(u, v) = \Psi(v, u) \end{cases}$

**Théorème :** Pour montrer qu'une forme est bilinéaire symétrique, il suffit de montrer qu'elle est linéaire par rapport à une variable, au choix, et qu'elle est symétrique.

**Démonstration :** On sait  $\begin{cases} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ \forall u, u_1, u_2 \in E \\ \forall v \in E \end{cases} \begin{cases} \Psi(\lambda.u_1 + \mu.u_2, v) = \lambda\Psi(u_1, v) + \mu\Psi(u_2, v) \\ \Psi(u, v) = \Psi(v, u) \end{cases}$

D'où  $\Psi(u, \lambda.v_1 + \mu.v_2) = \Psi(\lambda.v_1 + \mu.v_2, u) = \lambda\Psi(v_1, u) + \mu\Psi(v_2, u) = \lambda\Psi(u, v_1) + \mu\Psi(u, v_2)$  en faisant jouer la symétrie et la linéarité par rapport à chaque variable. On obtient bien la deuxième linéarité. ■

#### 1.2. Forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique

**Définition :** Une **forme quadratique** sur  $\mathbb{R}^n$  est une application de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  qui se met sous la forme d'un polynôme homogène de degré 2 des coordonnées du vecteur de  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème :** Si  $\Psi$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ , alors  $q : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto q(u) = \Psi(u, u) \end{cases}$  est une forme quadratique, c'est la **forme quadratique associée** à  $\Psi$ .

On a :  $q(\lambda.u) = \lambda^2 q(u)$ , ce qui prouve que  $q$  n'est pas linéaire !

**Théorème :** Si  $q$  une forme quadratique sur  $E$ , alors  $\Psi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\Psi(u, v) = \frac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2}$$

est une forme bilinéaire symétrique.

On dit alors que  $\Psi$  est la **forme polaire** de  $q$ .

**Démonstration :** La symétrie est évidente, on admet la bilinéarité.

$$\begin{aligned} \frac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2} &= \frac{\Psi(u+v, u+v) - \Psi(u, u) - \Psi(v, v)}{2} \\ &= \frac{(\Psi(u, u) + \Psi(u, v) + \Psi(v, u) + \Psi(v, v)) - \Psi(u, u) - \Psi(v, v)}{2} \\ &= \frac{\Psi(u, v) + \Psi(v, u)}{2} \\ &= \Psi(u, v) \end{aligned}$$

■

### 1.3. Forme quadratique définie positive

**Définition :**  $q$  une forme quadratique, on dit que  $q$  est **positive**  $\Leftrightarrow \forall u \in E, q(u) \geq 0$ .

**Définition :**  $q$  une forme quadratique positive, on dit que  $q$  est **définie-positive**  $\Leftrightarrow \forall u \in E, (q(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0)$ .  
On dit aussi que  $q$  est **positive non-dégénérée**.

Le même vocabulaire s'applique à la forme bilinéaire symétrique.

### 1.4. Produit Scalaire sur $E$

**Définition :** Un produit scalaire sur  $E$  est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur  $E$ .  
 $\Psi(u, v)$  se note le plus souvent  $\langle u, v \rangle$ .

**Exemple :** Le produit scalaire usuel du plan ou de l'espace. La forme quadratique est alors le carré scalaire.

Pour montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire, on montre successivement :

- la linéarité par rapport à une variable ;
- la symétrie ;

A ce niveau, on conclut que la forme est **bilinéaire symétrique**.

Ensuite, on montre :

- la positivité de la forme quadratique et enfin ;
- son caractère défini-positif.

A ce niveau, on conclut que la forme bilinéaire symétrique est bien un **produit scalaire**.

**Définition :** Un espace vectoriel **préhilbertien** est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Un espace vectoriel préhilbertien est donc un espace vectoriel réel. Il peut être de dimension finie ou infinie.

**Définition :** Un espace vectoriel **euclidien** est un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Un espace vectoriel euclidien est donc un espace vectoriel réel.

## 1.5. Exemples classiques

### a/ Produit scalaire défini par une intégrale

On va montrer que sur  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) dt$  est un produit scalaire.

Il faut d'abord montrer que c'est une forme bilinéaire symétrique, c'est à dire qu'elle est linéaire par rapport à la première variable et symétrique.

On considère des polynômes quelconques  $P_1, P_2, Q$  et des scalaires quelconques  $\lambda, \mu$ .

- $\langle \lambda P_1 + \mu P_2, Q \rangle = \lambda \langle P_1, Q \rangle + \mu \langle P_2, Q \rangle$  par simple linéarité de l'intégration.
- $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$  car  $P(t) Q(t) = Q(t) P(t)$  pour tout  $t$

Il faut ensuite montrer que la forme quadratique est positive puis définie-positive.

On considère un polynôme quelconque  $P$ .

- $\langle P, P \rangle = \int_0^1 P^2(t) dt \geq 0$  par positivité de l'intégrale. La forme est positive.
- $\langle P, P \rangle = \int_0^1 P^2(t) dt = 0$  implique que  $\forall t \in [0, 1], P^2(t) = 0$  car c'est un polynôme, donc une application **continue**, qui est de plus positive et d'intégrale nulle (théorème des 3 conditions). On a donc  $\forall t \in [0, 1], P(t) = 0$  et enfin,  $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = 0$ , c'est à dire  $P = 0$  car un **polynôme** qui a une infinité de racines est nul.

La forme est donc bien définie positive.

Finalement, sur  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) dt$  est un produit scalaire.

### b/ Produit scalaire sur un espace de matrices

Montrons que  $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$  définit un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Il faut montrer la linéarité par rapport à la première (ou la deuxième) variable, la symétrie, puis il faut montrer que la forme quadratique associée est positive, puis définie-positive.

- $\langle A, \lambda B + \mu C \rangle = \text{tr}({}^tA(\lambda B + \mu C)) = \text{tr}(\lambda {}^tAB + \mu {}^tAC) = \lambda \text{tr}({}^tAB) + \mu \text{tr}({}^tAC)$   
Ce qui donne :  $\langle A, \lambda B + \mu C \rangle = \lambda \langle A, B \rangle + \mu \langle A, C \rangle$  en utilisant la linéarité de la trace.
- $\langle B, A \rangle = \text{tr}({}^tBA) = \text{tr}({}^t({}^tBA)) = \text{tr}({}^tAB) = \langle A, B \rangle$ , en utilisant le fait qu'une matrice et sa transposée ont la même trace.

La forme est donc bilinéaire symétrique.

- ${}^tAB$  a pour coefficient  $i^{\text{ème}}$  ligne,  $i^{\text{ème}}$  colonne :  $\sum_{j=1}^n a_{ji} b_{ji}$ , celui de  ${}^tAA$  est :  $\sum_{j=1}^n a_{ji}^2$

$$\text{d'où : } \langle A, A \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \geq 0.$$

La forme est bien positive.

- $\langle A, A \rangle = 0$  donne  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = 0$  puis  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, a_{i,j} = 0$  et enfin  $A = 0$ .

La forme est définie positive.

On a bien un produit scalaire. De plus :  $\|A\|^2 = \langle A, A \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$ .

## 1.6. Inégalité de Cauchy-Schwarz (ou de Schwarz)

**Théorème :**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un produit scalaire sur  $E$ , alors,

$$\forall u, v \in E, |\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

L'égalité n'est vérifiée que si  $u$  et  $v$  sont liés.

**Démonstration :** On a  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \langle u + \lambda.v, u + \lambda.v \rangle &\geq 0 \\ \langle v, v \rangle \lambda^2 + 2 \langle u, v \rangle \lambda + \langle u, u \rangle &\geq 0 \end{aligned}$$

expression du second degré en  $\lambda$ , qui ne change pas de signe, elle a donc un discriminant négatif,

d'où :  $\frac{\Delta}{4} = \langle u, v \rangle^2 - \langle v, v \rangle \langle u, u \rangle \leq 0$  Ce qui assure le résultat.

Remarquons que l'égalité :  $|\langle u, v \rangle| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle}$  ne se produit que si  $\Delta = 0$ , donc si  $\langle v, v \rangle \lambda^2 + 2 \langle u, v \rangle \lambda + \langle u, u \rangle = 0$  pour un certain  $\lambda$ .

Cela revient à  $\langle u + \lambda.v, u + \lambda.v \rangle = 0$  et enfin  $u + \lambda.v = 0$ ,  $u$  et  $v$  sont liés. ■

**Exemple :** On va appliquer l'inégalité de Schwarz avec le produit scalaire précédent et  $Q(t) = t$ , compte tenu que  $\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$ , on obtient  $\left( \int_0^1 tP(t) dt \right)^2 \leq \frac{1}{3} \int_0^1 P^2(t) dt$  qui est un résultat valable pour tout polynôme  $P$ .

On n'oubliera donc pas que l'inégalité de Schwarz permet de montrer de nombreuses inégalités « étonnantes ».

## 2. Norme dérivant d'un produit scalaire

### 2.1. Norme sur $E$

**Définition :**  $\begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ u \mapsto \|u\| \end{cases}$  est une norme  $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall u, v \in E, \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \text{ (inégalité triangulaire)} \\ \forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda.u\| = |\lambda| \|u\| \text{ (positive homogénéité)} \\ \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ (séparation)} \end{cases}$

La norme d'un vecteur  $u$  est souvent notée  $\|u\|$

■ Même si on parle souvent de **la** norme d'un vecteur, il y a des infinités de normes différentes...

**Exemple :**  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $\begin{cases} \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ est la norme usuelle, mais} \\ \|(x, y)\| = |x| + |y| \text{ est une autre norme, de même que} \\ \|(x, y)\| = \max(|x|, |y|) \text{ en est une troisième} \end{cases}$

### 2.2. Norme dérivant d'un produit scalaire

**Théorème :** Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un produit scalaire sur  $E$ , alors :  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{q(u)}$  est une norme sur  $E$ .

**Démonstration :**  $\|\lambda.u\| = \sqrt{\langle \lambda.u, \lambda.u \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle u, u \rangle} = |\lambda| \|u\|$

d'autre part,  $\|u + v\|^2 = \sqrt{\langle u + v, u + v \rangle}^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + 2 \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle$

d'où, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,  $\|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2 \|u\| \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$  ce qui donne la deuxième relation. Enfin :  $\|u\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle u, u \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$  ■

Tout produit scalaire induit donc une norme sur  $E$ , souvent appelée norme euclidienne.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz se réécrit alors :

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

Par contre, toutes les normes ne proviennent pas d'un produit scalaire... On verra des contre-exemples dans le chapitre suivant.

### 2.3. Théorème de Pythagore

**Théorème :**  $\|\cdot\|$  une norme euclidienne et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  son produit scalaire, alors  $\forall u, v \in E$ ,

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \langle u, v \rangle$$

**Corollaire :**  $\|\cdot\|$  une norme euclidienne et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  son produit scalaire, alors

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$$

La démonstration a été faite dans la démonstration du théorème précédent.

## 3. Orthogonalité, Orthonormalité

### 3.1. Orthogonalité

**Définition :**  $u$  et  $v$  sont orthogonaux pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$

**Exemple :**  $E = \mathcal{C}^0([0, 2\pi])$ ,  $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt$ , alors  $\begin{cases} f : t \rightarrow \sin t \\ g : t \rightarrow \cos t \end{cases}$  sont orthogonales.

En effet, c'est encore le théorème des 3 conditions qui permet de prouver qu'on a encore affaire à un produit scalaire et  $\int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt = \left[ \frac{1}{2} \sin^2 t \right]_0^{2\pi} = 0$ , ce qui prouve l'orthogonalité.

Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs.

### 3.2. Orthogonal d'une partie

**Théorème :** Soit  $A$  une partie non vide de  $E$ , préhilbertien,

$$A^\perp = \{u \in E, \forall v \in A, \langle u, v \rangle = 0\}$$

est un sous espace vectoriel de  $E$ .

Si  $A$  ne contient qu'un seul vecteur  $v$ , on le note alors  $v^\perp$ .

**Démonstration :**  $A^\perp$  est clairement non vide. Montrons qu'il est stable par combinaison linéaire.

Soit  $\begin{cases} u_1, u_2 \in A^\perp \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ v \in A \end{cases}$ , alors  $\langle \lambda.u_1 + \mu.u_2, v \rangle = \lambda \langle u_1, v \rangle + \mu \langle u_2, v \rangle = 0$ .

Comme  $v$  est quelconque, ceci prouve que  $\lambda.u_1 + \mu.u_2 \in A^\perp$  qui est donc un sous espace vectoriel. ■

**Exemple :** Dans  $\mathbb{R}[X]$ , muni du nouveau produit scalaire (admis)  $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$ , on va chercher l'orthogonal de l'ensemble  $\mathcal{P}$  des polynômes pairs, dont on admet qu'il constitue un sous-espace vectoriel. Soit  $Q$  est un polynôme quelconque orthogonal à tous les polynômes pairs.

On considère  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{I}}$  définis par  $Q_{\mathcal{P}}(t) = \frac{Q(t) + Q(-t)}{2}$  et  $Q_{\mathcal{I}}(t) = \frac{Q(t) - Q(-t)}{2}$  qui sont respectivement pairs et impairs.

On a  $Q = Q_{\mathcal{P}} + Q_{\mathcal{I}}$ .

Soit  $P$  un polynôme pair quelconque.

$$\langle P, Q \rangle = 0 = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt = \int_{-1}^1 P(t) Q_{\mathcal{P}}(t) dt + \int_{-1}^1 \underbrace{P(t) Q_{\mathcal{I}}(t)}_{\text{impair}} dt = \int_{-1}^1 P(t) Q_{\mathcal{P}}(t) dt$$

En prenant  $P = Q_{\mathcal{P}}$ , on obtient en utilisant encore le théorème des 3 conditions  $Q_{\mathcal{P}} = 0$  et donc  $Q$  est impair. Comme tout polynôme impair convient, l'orthogonal de l'ensemble  $\mathcal{P}$  des polynômes pairs est l'ensemble des polynômes impairs.

**Théorème :**  $(\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n))^\perp = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^\perp$

Pour avoir l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel, il suffit donc de prendre l'orthogonal d'une base, ou d'une famille génératrice en dimension infinie.

**Démonstration :** Il est clair que  $(\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n))^\perp \subset \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^\perp$

D'autre part, soit  $v \in \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^\perp$ ,  $\langle v, u_1 \rangle = \langle v, u_2 \rangle = \dots = \langle v, u_n \rangle = 0$

On a donc  $\langle v, \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \dots + \lambda_n \cdot u_n \rangle = 0$  ou encore  $v \in (\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n))^\perp$  ■

### 3.3. Famille orthogonale, orthonormale de vecteurs

**Définition :** Une famille  $(u_i)_{i \in I}$  de vecteurs est **orthogonale**

$\Leftrightarrow$  deux vecteurs quelconques de cette famille,  $u_i, u_j$ , pour  $i \neq j$  sont orthogonaux.

**Définition :** Une famille  $(u_i)_{i \in I}$  de vecteurs est **orthonormale**

$\Leftrightarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{deux vecteurs quelconques de cette famille, } u_i, u_j, \text{ pour } i \neq j \text{ sont orthogonaux.} \\ \text{tout vecteur } u_i \text{ de cette famille est normé } (\|u_i\| = 1). \end{array} \right.$

On passe d'une famille orthogonale de vecteurs **non nuls** à une famille orthonormale en normant chaque vecteur.

**Théorème :** Toute famille orthonormale ou toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

**Démonstration :** Soit  $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \dots + \lambda_n \cdot u_n = 0$ , on fait le produit scalaire par  $u_n$ , tous les  $\langle u_i, u_n \rangle$  sont nuls sauf  $\langle u_n, u_n \rangle$  d'où  $\lambda_n = 0$ . Par récurrence immédiate, tous les  $\lambda_i$  sont nuls, la famille est libre. ■

### 3.4. Théorème et procédé de Schmidt

**Théorème :** Soit  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  une famille libre de vecteurs de  $E$  préhilbertien, alors, il existe une famille  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  orthonormale de vecteur telle que

$$\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$$

**Démonstration :** Il suffit de fabriquer une famille orthonormale  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ ,

la dimension de  $\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$  étant  $n$ , les  $\varepsilon_i$  sont non nuls.

La démonstration repose sur le fait qu'on ne change pas l'espace vectoriel engendré par une famille

- en ajoutant à cette famille des vecteurs de l'espace vectoriel engendré ou
- en enlevant à cette famille un ou des vecteurs combinaison linéaire des autres.

La démonstration se fait par récurrence sur  $n$ .

Pour  $n = 1$ ,  $\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$  convient.

On l'admet au rang  $n$ , on le montre au rang  $n + 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}) &= \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}) \\ &= \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, e_{n+1}) \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon_{n+1}^* = e_{n+1} + \lambda_1 \cdot \varepsilon_1 + \lambda_2 \cdot \varepsilon_2 + \dots + \lambda_n \cdot \varepsilon_n$  avec  $\lambda_i = -\frac{\langle e_{n+1}, \varepsilon_i \rangle}{\langle \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle}$ ,

alors  $\langle \varepsilon_{n+1}^*, \varepsilon_i \rangle = 0$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

On pose  $\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_{n+1}^*}{\|\varepsilon_{n+1}^*\|}$  avec toujours les mêmes orthogonalités.

Et donc

$$\begin{aligned} \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, e_{n+1}) &= \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, e_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \\ &= \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}) \end{aligned}$$

La famille  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1})$  est bien orthonormale. ■

**Corollaire :** Tout espace vectoriel euclidien, ou tout sous espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien possède au moins une base orthonormale.

**Démonstration :** On applique le théorème de Schmidt à une base quelconque. ■

En pratique, la démonstration du théorème nous guide vers le procédé de Schmidt :

- On part d'une base quelconque  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$
- On pose  $\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$  C'est le premier vecteur de la base orthonormale.
- On pose  $\varepsilon_2^* = e_2 + \lambda \cdot \varepsilon_1$  On cherche  $\lambda$  tel que  $\langle \varepsilon_2^*, \varepsilon_1 \rangle = 0$ , ce qui donne  $\lambda = -\langle e_2, \varepsilon_1 \rangle$
- On pose  $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_2^*}{\|\varepsilon_2^*\|}$  C'est le deuxième vecteur de la base orthonormale.
- On pose  $\varepsilon_3^* = e_3 + \lambda \cdot \varepsilon_1 + \mu \cdot \varepsilon_2$  On cherche  $\lambda$  et  $\mu$  tel que  $\begin{cases} \langle \varepsilon_3^*, \varepsilon_1 \rangle = 0 \\ \langle \varepsilon_3^*, \varepsilon_2 \rangle = 0 \end{cases}$ , d'où  $\begin{cases} \lambda = -\langle e_3, \varepsilon_1 \rangle \\ \mu = -\langle e_3, \varepsilon_2 \rangle \end{cases}$
- On pose  $\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_3^*}{\|\varepsilon_3^*\|}$  C'est le troisième vecteur de la base orthonormale.
- On continue ainsi en n'oubliant pas qu'à chaque étape, le calcul s'allonge...
- En pratique, on travaille en théorie le plus longtemps possible ! On profite ainsi de nombreuses simplifications à priori.

**Exemple :** Dans  $E = \mathbb{R}_2[X]$ , muni du nouveau produit scalaire (admis)  $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$ , on va chercher une base orthonormale. On part de la base  $(1, X, X^2)$

On a  $\varepsilon_1^* = 1$  puis  $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  le premier vecteur normé, ceci par un calcul simple.

$\varepsilon_2^* = X + \lambda \varepsilon_1$ , on écrit  $\langle \varepsilon_2^*, \varepsilon_1 \rangle = 0 = \langle X, \varepsilon_1 \rangle + \lambda = \lambda$ , et on obtient  $\varepsilon_2 = X \sqrt{\frac{3}{2}}$ , encore par un calcul simple.

$\varepsilon_3^* = X^2 + \lambda \varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1$ , on écrit  $\langle \varepsilon_3^*, \varepsilon_1 \rangle = 0 = \langle X^2, \varepsilon_1 \rangle + \mu$  d'où  $\mu = -\frac{\sqrt{2}}{3}$  et  $\langle \varepsilon_3^*, \varepsilon_2 \rangle = 0 = \langle X^2, \varepsilon_2 \rangle + \lambda = \lambda$

D'où  $\varepsilon_3^* = X^2 - \frac{1}{3}$  qu'il suffit de normer pour obtenir  $\varepsilon_3 = \frac{X^2 - \frac{1}{3}}{\frac{2}{15}\sqrt{10}} = \frac{(3X^2 - 1)\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$

On voit que le calcul devient vite complexe...

### 3.5. Projection orthogonale sur un sous espace de dimension finie

**Théorème :**  $E$  un espace vectoriel préhilbertien,  $F$  un sous espace vectoriel de dimension finie muni d'une base orthonormale  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ . Alors

$$p : u \rightarrow p(u) = \langle u, e_1 \rangle \cdot e_1 + \dots + \langle u, e_n \rangle \cdot e_n$$

définit un projecteur. Et comme  $(u - p(u)) \in F^\perp$ , on dit que  $p$  est la projection orthogonale sur  $F$ .

La figure 1, page suivante, illustre ce théorème.

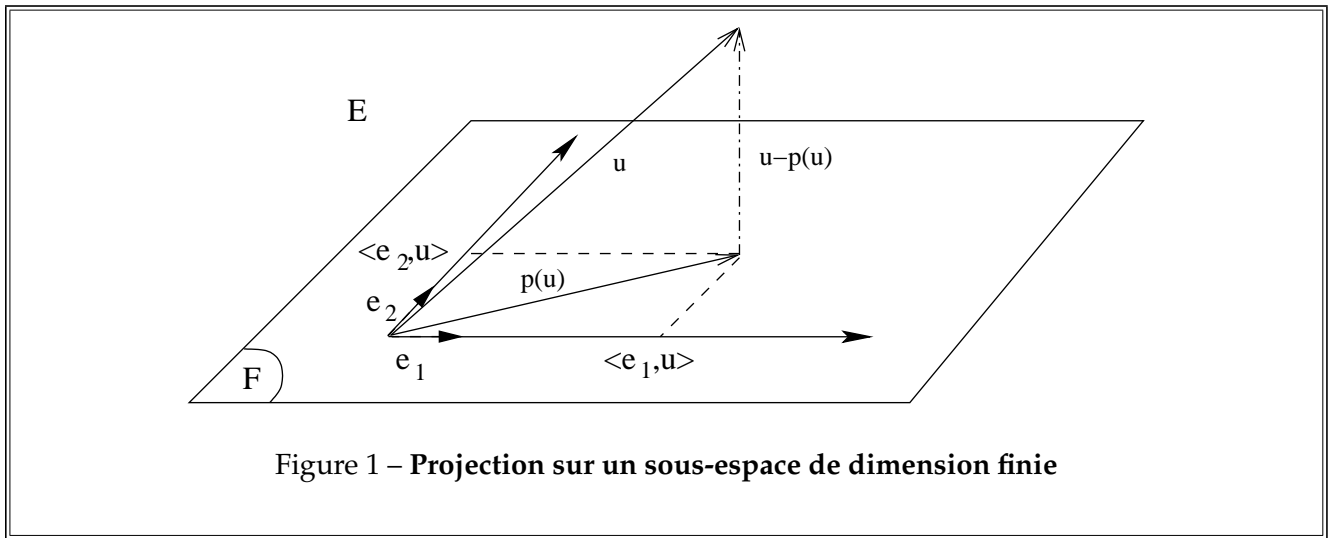
**Démonstration :** Pour montrer que  $(u - p(u)) \in F^\perp$ , il suffit de montrer qu'il est orthogonal à chaque  $e_i$ .

$$\begin{aligned} \langle u - p(u), e_i \rangle &= \langle u, e_i \rangle - \langle \langle u, e_1 \rangle \cdot e_1 + \dots + \langle u, e_n \rangle \cdot e_n, e_i \rangle \\ &= \langle u, e_i \rangle - \langle \langle u, e_i \rangle \cdot e_i, e_i \rangle \end{aligned}$$

car tous les autres termes sont nuls. D'où

$$\langle u - p(u), e_i \rangle = \langle u, e_i \rangle - \langle u, e_i \rangle \langle e_i, e_i \rangle = 0$$

$p$  est clairement linéaire par linéarité du produit scalaire par rapport à la première variable.



Il reste à montrer que  $p$  est un projecteur, c'est à dire  $p \circ p = p$ .

$$\begin{aligned} p \circ p(u) &= p(p(u)) \\ &= p(\langle u, e_1 \rangle \cdot e_1 + \dots + \langle u, e_n \rangle \cdot e_n) \\ &= \langle u, e_1 \rangle \cdot p(e_1) + \dots + \langle u, e_n \rangle \cdot p(e_n) \\ &= \langle u, e_1 \rangle \cdot e_1 + \dots + \langle u, e_n \rangle \cdot e_n \end{aligned}$$

car  $p(e_i) = \langle e_i, e_i \rangle \cdot e_i = e_i$ .

D'où

$$p \circ p(u) = p(u)$$

et enfin

$$p \circ p = p$$

Lorsque  $E$  est de dimension finie, on montre facilement que  $E = F \oplus F^\perp$  et  $p$  est la projection sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ , on appelle souvent  $q$  la projection sur  $F^\perp$  parallèlement à  $F$ , on a alors  $Id = p + q$ . ■

En pratique, comme il faut une base orthonormale du sous espace sur lequel on projette, on cherchera  $p$  si  $\dim F \leq \dim F^\perp$ , et  $q$  sinon. On projette sur le plus petit...

**Exemple :** Dans  $E = \mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire usuel, on cherche  $p$  la projection orthogonale sur le plan  $P$  d'équation  $x + y - z = 0$

$$P^\perp = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ de base orthonormale } \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Avec } u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ on a } q(u) = \left\langle u, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{x+y-z}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } p(u) = u - q(u) = \begin{pmatrix} x - \frac{x+y-z}{3} \\ y - \frac{x+y-z}{3} \\ z + \frac{x+y-z}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ -x + 2y + z \\ x + y + 2z \end{pmatrix}$$

La matrice de cette projection dans la base canonique est donc :  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$



## 4. Espaces Vectoriels Euclidiens

Rappelons que ce sont les espaces vectoriels réels de dimension finie munis d'un produit scalaire.

### 4.1. Produit scalaire et norme dans une base orthonormale

**Théorème :**  $E$  étant muni d'une base orthonormale  $(e_1, \dots, e_n)$ ,  $U : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $V : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  les vecteurs colonnes des coordonnées de  $u$  et  $v$  dans la base, alors  $\langle u, v \rangle = {}^tUV = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

De plus, la **norme** euclidienne est  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

**Démonstration :** Par bilinéarité :

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i, \sum_{j=1}^n y_j \cdot e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle,$$

Les produits scalaires  $\langle e_i, e_j \rangle$  sont nuls pour  $i \neq j$  et valent 1 sinon. Ce qui donne :

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

■

### 4.2. Matrice d'une forme bilinéaire symétrique, d'une forme quadratique dans une base

Comme on passe d'une forme bilinéaire symétrique à une forme quadratique et réciproquement, ce sera la même matrice.

Par bilinéarité, avec les mêmes notations,

$$\Psi(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \Psi(e_i, e_j)$$

**Définition :**  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $M = (\Psi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$  est appelée matrice de  $\Psi$ , forme bilinéaire symétrique, dans la base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ . C'est une matrice symétrique. On a alors :

$$\Psi(u, v) = {}^tUMV$$

Dans le cas particulier où  $E = \mathbb{R}^n$  :

- Si on a la forme bilinéaire symétrique écrite  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j m_{i,j}$ , il suffit de mettre  $m_{i,j}$  en  $i^{\text{ème}}$  ligne et  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $M$ .
- Si on a la forme quadratique écrite  $q(u) = \sum_{i=1}^n m_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n x_i y_j m_{i,j}$ , il suffit de mettre sur la diagonale les coefficients de  $x_i^2$  et ailleurs la **moitié** des coefficients de  $x_i x_j$ , c'est à dire ici  $m_{i,j}$ .

**Exemple :** En dimension 2, considérons la forme quadratique :  $q(u) = 2x^2 + xy$ .

Sa matrice dans la même base est :  $\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ .

### 4.3. Endomorphisme orthogonal, groupe orthogonal

**Définition :** Un endomorphisme  $\varphi$  de  $E$  un espace vectoriel euclidien, est dit **orthogonal**

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \varphi \text{ conserve le produit scalaire} \\ &\Leftrightarrow \forall u, v \in E, \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

**Théorème :**  $\varphi$  est orthogonal  $\Leftrightarrow \varphi$  conserve la norme  $\Leftrightarrow \forall u \in E, \|\varphi(u)\| = \|u\|$

**Démonstration :** On a :

$$\begin{aligned} \|\varphi(u+v)\|^2 &= \langle \varphi(u+v), \varphi(u+v) \rangle \\ &= \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle + 2 \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle + \langle \varphi(v), \varphi(v) \rangle = \|u+v\|^2 \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\|u+v\|^2 = \langle u, u \rangle + 2 \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = \langle u, u \rangle + 2c + \langle v, v \rangle$$

D'où  $\langle u, v \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle$ . La réciproque est évidente en prenant  $u = v$ . ■

**Théorème :** Un endomorphisme orthogonal est un automorphisme.

**Démonstration :** Il suffit de montrer que  $\varphi$  est injective car  $E$  est de dimension finie.

$$\varphi(u) = 0 \Leftrightarrow \|\varphi(u)\| = 0 \Leftrightarrow \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

**Théorème :** Un endomorphisme orthogonal conserve l'orthogonalité.

**Théorème :** Un endomorphisme est orthogonal

- $\Leftrightarrow$  il transforme une base orthonormale en une base orthonormale
- $\Leftrightarrow$  il transforme toute base orthonormale en une base orthonormale.

**Démonstration :** Les implications directes sont claires car c'est un automorphisme qui conserve l'orthogonalité.

Pour la réciproque,

on considère  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base orthonormale, et  $\varphi$  un endomorphisme tel que  $(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n))$  soit une base orthonormale.

$$\begin{aligned} \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle \varphi(e_i), \varphi(e_j) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ &= \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

**Théorème :** L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de  $E$ , muni de la loi  $\circ$  de composition des applications est un groupe noté  $O(E)$ , sous groupe de  $GL(E)$ .

**Démonstration :** On montre que  $O(E)$  est un sous groupe de  $GL(E)$ .

$O(E)$  est non vide car il contient l'identité.

Si  $\varphi$  et  $\psi$  appartiennent à  $O(E)$ ,

$$\begin{aligned} \langle \psi \circ \varphi(u), \psi \circ \varphi(v) \rangle &= \langle \psi(\varphi(u)), \psi(\varphi(v)) \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle \\ &= \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

Si  $\varphi$  appartient à  $O(E)$ ,  $\varphi$  est un automorphisme, on peut donc considérer  $\varphi^{-1}$ .

$$\begin{aligned} \langle \varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v) \rangle &= \langle \varphi \circ \varphi^{-1}(u), \varphi \circ \varphi^{-1}(v) \rangle \\ &= \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

#### 4.4. Matrice orthogonale

**Définition :** Une matrice  $M$  est **orthogonale**

$\Leftrightarrow M$  est la matrice d'un endomorphisme orthogonal dans une base orthonormale.

**Théorème :**  $M$  est orthogonale

$\Leftrightarrow$  les vecteurs colonnes de  $M$  sont normés et orthogonaux 2 à 2

$\Leftrightarrow$  les vecteurs lignes de  $M$  sont normés et orthogonaux 2 à 2

$\Leftrightarrow M^{-1} = {}^tM$

$\Leftrightarrow M {}^tM = {}^tMM = I$  (une seule égalité suffit).

**Démonstration :**  $M$  est la matrice de  $\varphi$ , endomorphisme orthogonal, dans la base orthonormale  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ . Les vecteurs colonnes de  $M$  sont les vecteurs d'une base orthonormale, ils sont donc normés et orthogonaux 2 à 2.

Réciproquement, si les vecteurs colonnes sont normés et orthogonaux 2 à 2,  $\varphi$  transforme une base orthonormale en une base orthonormale.  $\varphi$  est donc orthogonal et  $M$  orthogonale.

L'équivalence à  $M {}^tM = I$  en découle immédiatement.

$M {}^tM = I \Leftrightarrow M^{-1} = {}^tM \Leftrightarrow {}^tM M = I \Leftrightarrow {}^tM$  est orthogonale.

Et enfin, cela équivaut à ce que les vecteurs lignes de  $M$  sont normés et orthogonaux 2 à 2. ■

Une matrice orthogonale s'interprète donc comme la matrice d'un endomorphisme orthogonal dans une base orthonormale ou comme une matrice de changement de bases orthonormales.

**Notation :** Si  $E = \mathbb{R}^n$ , le groupe orthogonal de  $E$  se note  $O(n)$ . La loi est alors le produit des matrices.

## 5. Isométries Vectorielles du Plan et de l'Espace

Dans une base orthonormale, la matrice d'une isométrie, application qui conserve la norme des vecteurs, est orthogonale, ce qui est une propriété caractéristique. Une matrice orthogonale est donc la matrice d'une isométrie dans une base orthonormale.

C'est cette isométrie dont on cherche à identifier les éléments géométriques.

### 5.1. Cas particulier des symétries orthogonales

**Théorème :** Une isométrie vectorielle est une **symétrie** orthogonale  $\Leftrightarrow$  Sa matrice dans une base orthonormale est **symétrique**.

**Démonstration :** Soit  $\varphi$  l'isométrie et  $M$  sa matrice, orthogonale, dans une base orthonormale.

Si  $\varphi$  est une symétrie orthogonale,  $\varphi \circ \varphi = Id$ , donc  $M^2 = I$  d'où  $M = M^{-1} = {}^tM$ .

$M$  est donc symétrique.

Réciproquement, si  $M$  est symétrique,  $M = {}^tM = M^{-1}$  donc  $M^2 = I$  et  $\varphi \circ \varphi = Id$ , on a bien montré que  $\varphi$  est une symétrie orthogonale. ■

Cette isométrie est donc la symétrie orthogonale par rapport à l'ensemble des vecteurs invariants.

L'interprétation géométrique de cette isométrie ne dépend donc que de la dimension de cet espace vectoriel.

#### a/ Symétries orthogonales du plan

On trouve :

- L'identité, qui est une isométrie directe.  
Tous les vecteurs sont invariants.
- Une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle, isométrie indirecte.  
On a une droite vectorielle invariante.

- Moins l'identité, isométrie directe.  
Seul le vecteur nul est invariant.  
C'est aussi la rotation d'angle  $\pi$ .

#### b/ Symétries orthogonales de l'espace

On trouve :

- L'identité, qui est une isométrie directe.  
Tous les vecteurs sont invariants.
- Une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle, isométrie directe.  
On a une droite vectorielle invariante.  
C'est aussi une rotation d'angle  $\pi$  autour de cette droite.
- Une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel, isométrie indirecte.  
On a un plan vectoriel invariant.
- Moins l'identité, isométrie indirecte.  
Seul le vecteur nul est invariant.

Une symétrie orthogonale par rapport à une droite est indirecte quand on travaille dans le plan et directe quand on travaille dans l'espace...

### 5.2. Isométries vectorielles du plan

Dans une base orthonormale, la matrice est orthogonale.  
On a déjà reconnu les éventuelles symétries orthogonales.

#### a/ Isométries directes, le déterminant vaut 1

C'est une rotation d'angle  $\theta$ , l'identité ou moins l'identité. La matrice est :  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

#### b/ Isométrie indirecte, le déterminant vaut -1

C'est une symétrie orthogonale par rapport à la droite  $D_{\frac{\theta}{2}}$  tournée de  $\frac{\theta}{2}$  par rapport à l'axe  $Ox$ .

La matrice est :  $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$

### 5.3. Isométries vectorielles de l'espace

On a déjà reconnu les éventuelles symétries orthogonales. Dans une base orthonormale, la matrice est orthogonale.

Il y a toujours une valeur propre réelle puisque le polynôme caractéristique est réel de degré 3. Cette valeur propre est 1 ou -1.

Si les autres valeurs propres ne sont pas réelles, elles sont conjuguées, de produit positif. Comme le déterminant est le produit des valeurs propres, si le déterminant vaut 1, alors 1 est valeur propre, s'il vaut  $-1$ , alors  $-1$  est valeur propre.

On ne considérera pas le cas où l'isométrie est l'identité.

#### a/ Isométrie directe : le déterminant vaut 1, le troisième vecteur est le produit vectoriel des 2 premiers

Dans une certaine base, la matrice est :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ .

C'est l'identité ou une rotation d'axe dirigé par un vecteur propre associé à 1 :  $\vec{e}_1$ , le premier vecteur de la base considérée, et d'angle  $\theta$ .

On trouve  $\theta$  :

- en cherchant  $\cos \theta$  par la trace qui vaut  $1 + 2 \cos \theta$
- en cherchant le signe de  $\sin \theta$  qui est celui de  $\det(\vec{e}_1, \vec{u}, \varphi(\vec{u}))$ ,  $\vec{u}$  étant un vecteur quelconque non colinéaire à  $\vec{e}_1$ .
- le seul cas particulier est quand  $\cos \theta = -1$ , c'est à dire quand  $\theta = \pi_{[2\pi]}$ , auquel cas c'est une rotation d'angle  $\pi$ , appelée aussi demi-tour, c'est aussi la symétrie orthogonale par rapport à l'axe dirigé par  $\vec{e}_1$ .

b/ Isométrie indirecte : le déterminant vaut -1, le troisième vecteur est l'opposé du produit vectoriel des 2 premiers

Dans une certaine base, la matrice est : 
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

C'est la composée commutative

- d'une rotation vectorielle et,
- d'une symétrie orthogonale par rapport au plan orthogonal à l'axe de la rotation.

On cherche d'abord l'axe de la rotation, qui est le sous-espace propre pour la valeur propre  $-1$ , qu'on oriente dans le sens de  $\vec{e}_{-1}$ .

On cherche ensuite  $\cos \theta$  par la trace qui vaut ici  $-1 + 2 \cos \theta$ .

- Si  $\cos \theta = 1$ , ce qui revient à ce que  $\theta = 0_{[2\pi]}$ , la rotation est l'identité. C'est simplement la symétrie orthogonale par rapport au plan orthogonal à « l'axe ».
- Sinon, c'est la composée annoncée. La seule donnée qui nous manque est le signe de  $\sin \theta$  qui se trouve comme dans le cas d'une isométrie directe.

Le signe de  $\sin \theta$  est celui de  $\det(\vec{e}_{-1}, \vec{u}, \varphi(\vec{u}))$ ,  $\vec{u}$  étant un vecteur quelconque non colinéaire à  $\vec{e}_{-1}$ .

**Exemple :** On va identifier la transformation

dont la matrice dans une base orthonormale est : 
$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir que cette matrice est orthogonale, il s'agit donc d'une isométrie vectorielle. Comme, de plus, elle est symétrique, c'est une symétrie vectorielle.

Il suffit de rechercher les vecteurs invariants, ce qui revient à : 
$$\begin{cases} -5x - 2y + z = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \\ x - 2y - 5z = 0 \end{cases}.$$

En soustrayant la première et la troisième ligne, on obtient  $x = z$  et le système devient : 
$$\begin{cases} x = z \\ 2x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}.$$

Il s'agit d'une droite vectorielle  $\vec{\Delta}$  engendrée par  $\vec{u} : \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

L'isométrie est la symétrie orthogonale par rapport à  $\vec{\Delta}$ , c'est aussi la rotation d'axe  $\vec{\Delta}$  et d'angle  $\pi$ .

**Exemple :** On va identifier la transformation

dont la matrice dans une base orthonormale est :

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir que cette matrice est orthogonale, il s'agit donc d'une isométrie vectorielle.

Ca n'est pas une symétrie orthogonale, car la matrice n'est pas symétrique.

Le troisième vecteur est l'opposé du produit vectoriel des deux premiers, c'est donc une isométrie indirecte.

On est dans le cas de la composée commutative d'une rotation et d'une symétrie orthogonale.

L'axe de la rotation et le plan de symétrie qui lui est orthogonal sont donnés par les vecteurs transformés en leur

opposé : 
$$\begin{cases} x - y - z\sqrt{6} = 0 \\ -x + y + z\sqrt{6} = 0 \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{6} + 2z = 0 \end{cases}$$
 qui équivaut au système : 
$$\begin{cases} x - y - z\sqrt{6} = 0 \\ 6x - 6y + 2z\sqrt{6} = 0 \end{cases}$$
 ou encore : 
$$\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}.$$

L'axe est la droite vectorielle  $\vec{\Delta}$  engendrée et dirigée par  $\vec{u} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Le plan de symétrie est le plan  $\vec{\Pi}$  d'équation  $x + y = 0$ .

L'angle de la rotation vérifie  $-1 + 2 \cos \theta = -2$  en utilisant la trace. On a donc  $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ .

Le signe de  $\sin \theta$  est le signe de 
$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & \sqrt{6} & 0 \end{vmatrix} < 0,$$
 et donc  $\theta = -\frac{2\pi}{3}$  à  $2\pi$  près.

La transformation est la composée commutative de la rotation d'axe  $\vec{\Delta}$  engendrée et dirigée par  $\vec{u} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$

d'angle  $-\frac{2\pi}{3}$  et de la symétrie orthogonale par rapport au plan  $\vec{\Pi}$  d'équation  $x + y = 0$ .

#### 5.4. Rotations vectorielles de l'espace

**Théorème :** Si  $\varphi$  est la rotation d'angle  $\theta$ , et d'axe dirigé par  $\vec{e}_1$  alors :

$$\varphi(\vec{u}) = (1 - \cos \theta) \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{u}}{\|\vec{e}_1\|^2} \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{u} + \sin \theta \frac{\vec{e}_1 \wedge \vec{u}}{\|\vec{e}_1\|}$$

**Démonstration :** Il suffit de prendre une base orthonormale  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , pour laquelle  $\vec{i}$  est colinéaire à  $\vec{e}_1$ ,

de même sens, la matrice de  $\varphi$  est 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

L'image de  $\vec{u}$  de coordonnées  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  est de coordonnées  $\begin{pmatrix} x \\ y \cos \theta - z \sin \theta \\ y \sin \theta + z \cos \theta \end{pmatrix}.$

La formule peut se réécrire :  $\varphi(\vec{u}) = (1 - \cos \theta) \vec{i} \cdot \vec{u} \vec{i} + \cos \theta \vec{u} + \sin \theta \vec{i} \wedge \vec{u}$

On calcule les coordonnées de  $(1 - \cos \theta) \vec{i} \cdot \vec{u} \vec{i} + \cos \theta \vec{u} + \sin \theta \vec{i} \wedge \vec{u}$  :

$$\begin{pmatrix} (1 - \cos \theta) x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \cos \theta \\ y \cos \theta \\ z \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -z \sin \theta \\ y \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \cos \theta - z \sin \theta \\ y \sin \theta + z \cos \theta \end{pmatrix}$$

**Démonstration :** On va donner ici une autre démonstration moins besogneuse.

Soit  $\vec{i}$  normé et colinéaire à  $\vec{e}_1$ , de même sens. On décompose  $\vec{u}$  :

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{i}) \vec{i} + (\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{i}) \vec{i})$$

Ce dernier vecteur  $\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{i}) \vec{i}$  est orthogonal à  $\vec{i}$ .

Pour un tel vecteur  $\vec{v}$  orthogonal à  $\vec{i}$  :  $\varphi(\vec{v}) = \cos \theta \vec{v} + \sin \theta (\vec{i} \wedge \vec{v})$

Et donc :

$$\varphi(\vec{u}) = (\vec{u} \cdot \vec{i}) \vec{i} + \cos \theta (\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{i}) \vec{i}) + \sin \theta (\vec{i} \wedge (\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{i}) \vec{i}))$$

Enfin, comme  $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0}$  :

$$\varphi(\vec{u}) = (1 - \cos \theta) (\vec{i} \cdot \vec{u}) \vec{i} + \cos \theta \vec{u} + \sin \theta (\vec{i} \wedge \vec{u})$$

## 6. Endomorphismes Symétriques et Applications

### 6.1. Endomorphismes symétriques

**Définition :**  $E$  un espace vectoriel euclidien,  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ ,

$$\varphi \text{ est symétrique} \Leftrightarrow \forall u, v \in E, \langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$$

**Théorème :** Un endomorphisme est symétrique  $\Leftrightarrow$  sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

On ne sait rien de la matrice d'un endomorphisme symétrique dans une base quelconque.

**Démonstration :**  $\varphi$  symétrique a pour matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  dans  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  orthonormale.

Les coordonnées de  $u$  et  $v$  sont les vecteurs colonnes  $U$  et  $V$ .

$$\langle \varphi(u), v \rangle = {}^t(AU) V = {}^tU {}^tAV = {}^tUAV = \langle u, \varphi(v) \rangle$$

D'où  $a_{i,j} = \langle e_i, \varphi(e_j) \rangle$  et  $a_{j,i} = \langle \varphi(e_i), e_j \rangle$  ce qui prouve que  $A$  est symétrique.

Réciproquement, si  $A$  est symétrique,  ${}^tA = A$  et clairement  $\langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$ .

**Théorème :**  $E$  un espace vectoriel euclidien,  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\varphi$  symétrique, alors  $\varphi$  est diagonalisable au besoin dans une base orthonormale de vecteurs propres.

**Démonstration :** On ne montre que le plus facile, le reste est admis. On montre que si  $u$  et  $v$  sont propres pour des valeurs propres distinctes, ils sont orthogonaux.

$$\langle \varphi(u), v \rangle = \langle \lambda.u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle = \langle u, \mu.v \rangle = \mu \langle u, v \rangle$$

D'où :  $(\lambda - \mu) \langle u, v \rangle = 0$ .

**Corollaire :**  $A$  une matrice symétrique réelle,  $A$  est diagonalisable avec au besoin une matrice de passage orthogonale.

Ceci peut éviter bien des calculs puisque  $P^{-1} = {}^tP$ .

Il est donc souvent intéressant de chercher à diagonaliser une **matrice symétrique réelle** dans une base orthonormale de vecteurs propres quand on a besoin de  $P^{-1}$ .

## 6.2. Réduction d'une forme quadratique dans une base orthonormale

Une forme quadratique, ou une forme bilinéaire symétrique a une matrice symétrique réelle. Il existe donc une base orthonormale où la matrice de la forme est diagonale.

Si dans cette base  $u$  a pour coordonnées  $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $q(u) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$ .

**Théorème :** Une matrice symétrique réelle est une matrice de produit scalaire  $\Leftrightarrow$  toutes les valeurs propres sont strictement positives.

**Démonstration :** Cela revient à ce que la forme quadratique soit définie positive. Et pour cela, on utilise la remarque précédente. ■

## 6.3. Diagonalisation d'une matrice symétrique réelle en dimension 3

Pour une matrice symétrique réelle en dimension 3, qu'on cherche à diagonaliser dans une base orthonormale, seulement 3 cas peuvent se produire :

- Une valeur propre triple : la matrice est déjà diagonale !
- Trois valeurs propres simples : les vecteurs propres associés sont déjà orthogonaux, il suffit de les normer.
- Une valeur propre simple  $\lambda$  et une double  $\mu$  : on cherche  $E_\mu$  correspondant à la valeur propre double, on trouve l'équation d'un plan vectoriel.

Un vecteur normal à ce plan et normé est propre pour  $\lambda$ , c'est :  $\vec{I}$ , le premier vecteur de la nouvelle base orthonormale.

On prend un vecteur de  $E_\mu$  qu'on norme, c'est :  $\vec{J}$ , le second vecteur de la nouvelle base orthonormale.

On calcule enfin  $\vec{I} \wedge \vec{J}$ , c'est :  $\vec{K}$ , le troisième vecteur de la nouvelle base orthonormale, qui est propre pour la valeur propre  $\mu$ , compte tenu de l'orthogonalité des sous-espaces propres.

## 6.4. Identification d'une conique

On va utiliser la réduction des formes quadratiques dans le cas où il y a des termes en  $xy$  dans l'équation. On part d'un polynôme non nul effectivement du second degré en  $x$  et  $y$ . (la forme quadratique n'est pas nulle).

a/ Cas où il n'y a pas de termes en  $xy$

- avaler, si possible, les termes en  $x$  et en  $y$  dans des carrés par la transformation habituelle :

$$\left(x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}\right).$$

Cela revient à faire une translation de l'origine du repère.

- se ramener ensuite à une des formes canoniques décrites.
  - On trouve des paraboles, hyperboles et ellipses (ou cercles)
  - mais aussi des coniques dégénérées : couple de droites, droite, point, vide.

b/ Cas où il y a des termes en  $xy$

- on repère la forme quadratique formée des termes du second degré  $ax^2 + 2bxy + cy^2$

on considère sa matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  qu'on diagonalise dans une base orthonormale directe de vecteurs propres, avec  $P$  la matrice de passage et  $\lambda$  et  $\mu$  les deux valeurs propres. Cela revient à faire une rotation du repère.



- alors  $a x^2 + 2 b x y + c y^2 = \lambda X^2 + \mu Y^2$  avec  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  qui nous sert aussi à transformer le reste de l'équation de la conique.
- il n'y a donc plus de termes en  $x y$  dans ce repère. On est ramené au cas précédent.

Dans tous les cas, avec les notations précédentes où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les valeurs propres de la forme quadratique, on peut conclure sur le type de conique obtenu.

- $\lambda \mu > 0$  On a une ellipse, éventuellement dégénérée (un point, le vide).
- $\lambda \mu < 0$  On a une hyperbole, éventuellement dégénérée (deux droites sécantes).
- $\lambda \mu = 0$  On a une parabole, éventuellement dégénérée (deux droites parallèles, une droite).

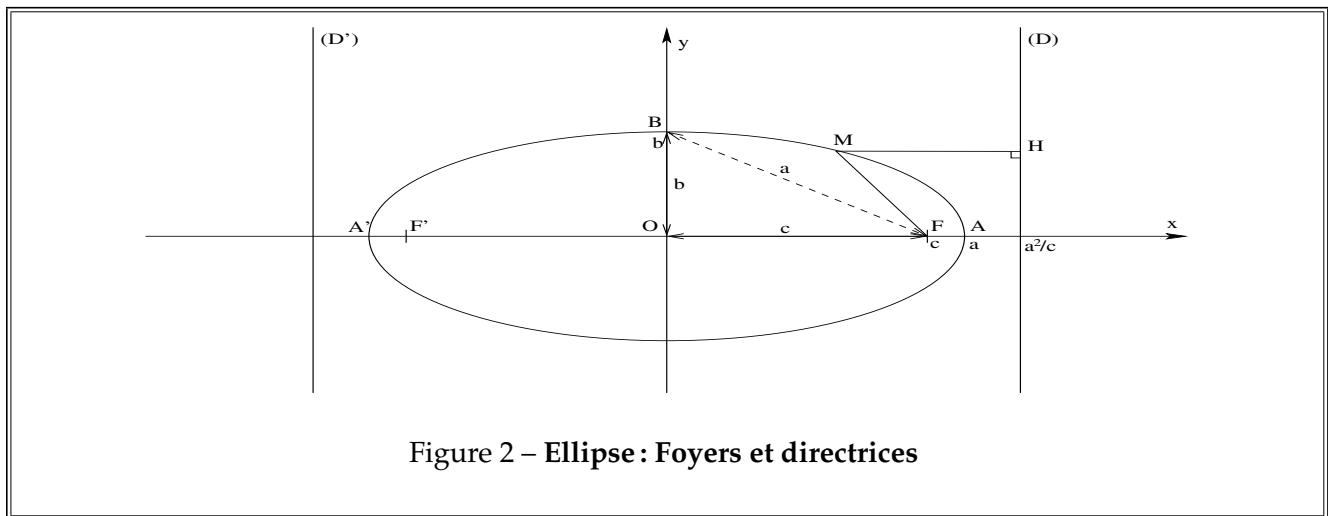
Ensuite, on opère la réduction habituelle du programme de première année ...

## 6.5. Petits rappels sur les coniques

a/ Ellipse : équation réduite centrée  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- $a$  et  $b$  avec  $a > b > 0$  sont les demi grand axe et demi petit axe. Les foyers sont alors sur  $Ox$
- $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  est la distance du centre aux foyers
- $e = \frac{c}{a}$  est l'excentricité

La figure 2, ci-dessous, explicite les éléments géométriques de l'ellipse.



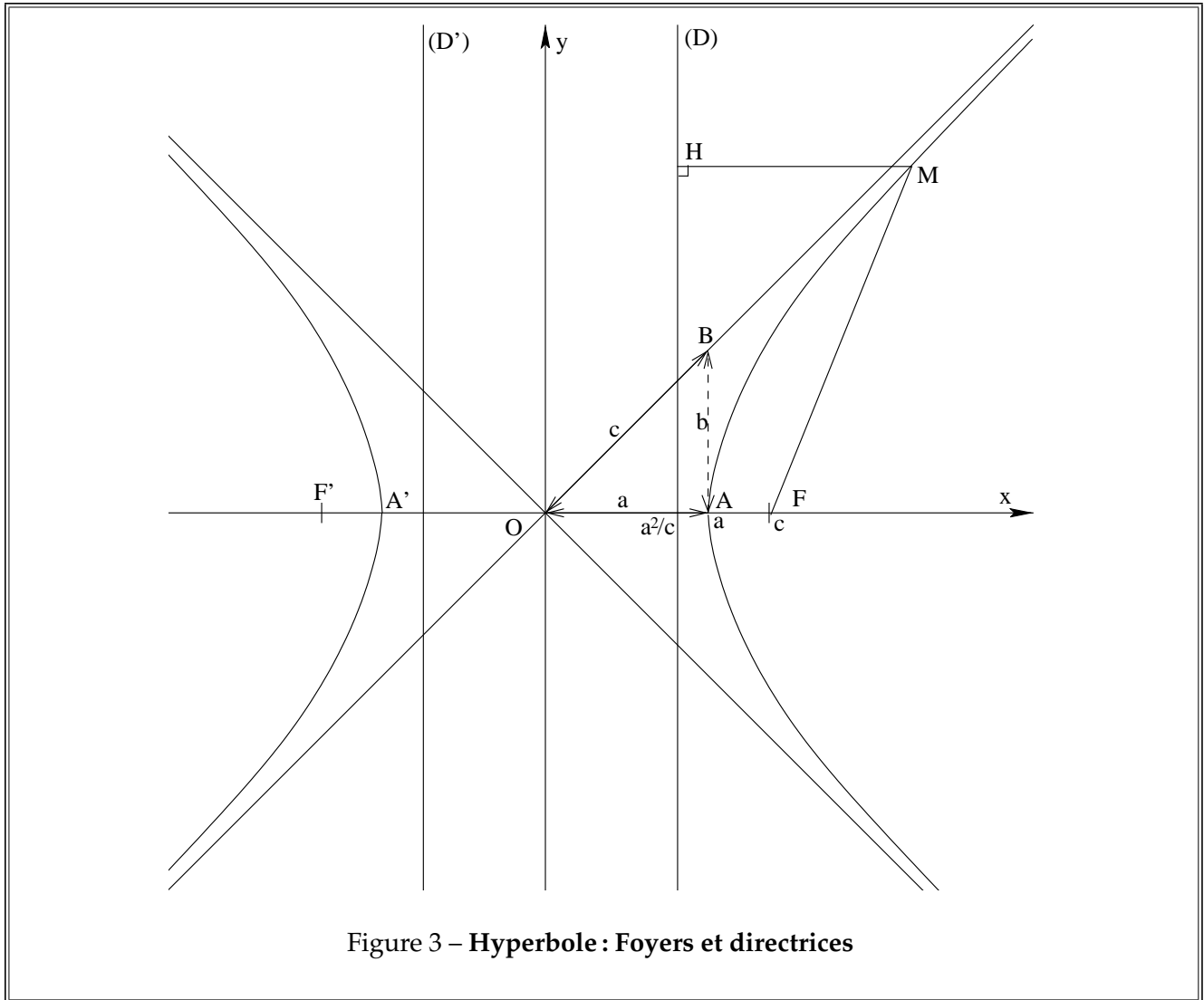
b/ Parabole : équation réduite  $y^2 = 2px$  avec  $p > 0$  le paramètre

- $O$  est le sommet et  $Ox$  l'axe de symétrie
- l'excentricité  $e$  vaut 1 et l'unique foyer  $F$  est à la distance  $\frac{p}{2}$  du sommet sur l'axe de symétrie

c/ Hyperbole : équation réduite centrée  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

- les foyers sont alors sur  $Ox$
- $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  est la distance du centre aux foyers
- $e = \frac{c}{a}$  est l'excentricité
- les asymptotes sont d'équation  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$

La figure 3, ci-dessous, explicite les éléments géométriques de l'hyperbole.



#### d/ Exemples de réduction

**Exemple :** On va d'abord retrouver la nature de la conique d'équation  $xy = 1$  dans le repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On réécrit cette équation  $2xy = 2$ .

La forme quadratique a alors pour matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  dont les valeurs propres sont 1 et  $-1$ .

Les vecteurs propres associés sont :  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$P = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  est orthogonale directe, et représente une rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .

Dans le nouveau repère, tourné de  $\frac{\pi}{4}$ ,  $2xy = X^2 - Y^2 = 2$ . On a bien une hyperbole !

**Exemple :** On va identifier la conique d'équation  $4x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 4y = 0$  dans le repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

La forme quadratique a alors pour matrice :  $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  dont les valeurs propres sont 0 et 5.

Les vecteurs propres associés sont :  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$P = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  est orthogonale directe, et représente une rotation de centre  $O$  et d'angle  $-\arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

Dans le nouveau repère, tourné de  $-\arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$ ,  $4x^2 + 4xy + y^2 = 5Y^2$ .

D'autre part,  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  donne facilement :  $-2x + 4y = -2X\sqrt{5}$ .

Finalement, l'équation dans le nouveau repère est  $5Y^2 - 2X\sqrt{5} = 0$  qui est une parabole d'axe  $OX$ , de sommet  $O$  et de paramètre  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

## 7. Compléments

### 7.1. Avec Maple

Comme toujours en algèbre linéaire, il faut charger le package `linalg`

```
> with(linalg);
```

```
> dotprod(U,V);
```

 calcule le produit scalaire (usuel) de 2 vecteurs.

```
> norm(U,2);
```

 calcule la norme usuelle, dite aussi norme euclidienne ou norme quadratique, c'est à dire la racine carrée de la somme des carrés des coordonnées, d'où le « 2 ».

```
> crossprod(U,V);
```

 calcule le produit vectoriel de 2 vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

Enfin, Maple connaît le procédé de Schmidt (ou de Gram-Schmidt) qui, pour une liste de vecteurs renvoie une famille orthogonale qui engendre le même sous espace vectoriel. L'option « `normalized` » permet d'avoir si on le désire une gamille orthonormale.

```
> GramSchmidt([U,V,W]);
```

```
> GramSchmidt([U,V,W],normalized);
```

 sont les 2 syntaxes usuelles.

### 7.2. Les mathématiciens du chapitre

**Euclide ~330 av JC-~275 av JC** Mathématicien grec auteur des éléments qui « refondent » la géométrie

**Hilbert David 1862-1943** Ce mathématicien allemand refonde axiomatiquement la géométrie d'Euclide en ajoutant les axiomes « implicites »...

**Schwarz Hermann 1843-1921** Mathématicien allemand est connu pour ses apports sur les dérivées partielles, les surfaces...