Sommaire

IL s'agit de généraliser la notion d'intégrale sur un intervalle quelconque, c'est à dire aux cas où
- f est continue, en général non bornée, sur un intervalle borné du type $[a,b[$ ou $]a,b]$, ou bien
- f est continue sur un intervalle du type $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,b]$.

Sauf indication particulière, on appellera I un intervalle de l'un des quatre types précédents. On écrira les théorèmes pour $\mathrm{I}=[a,b[$ ou $\mathrm{I}=[a,+\infty[$. Dans les autres cas, on adaptera les énoncés des théorèmes, ce qui est toujours facile.

La figure 1, page suivante, représente le cas où b est fini et où la fonction est positive. Le problème est de savoir si l'aire hachurée est « finie ».

La figure 2, page suivante, représente le cas où on est à l'infini et où la fonction est positive. Le problème est de savoir si l'aire hachurée est « finie ».

1. Nature d'une intégrale impropre

1.1. Locale intégrabilité

Définition : On dit que f est localement intégrable sur I $\Leftrightarrow$
$\forall\alpha,\beta$, tel que $[\alpha,\beta]\subset\mathrm{I}$, f est intégrable sur $[\alpha,\beta]$.

En pratique, f est le plus souvent continue sur I ce qui implique le fait qu'elle est localement intégrable sur I. Ceci sera le début invariable de l'étude d'une intégrale généralisée.

1.2. Intégrale convergente

Définition : Soit f localement intégrable sur $[a,b[$.
On dit l'intégrale de f sur $[a,b[$ **converge** ou **existe** $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe (au sens de limite finie).
On note cette limite $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui est **nouvelle** notation.

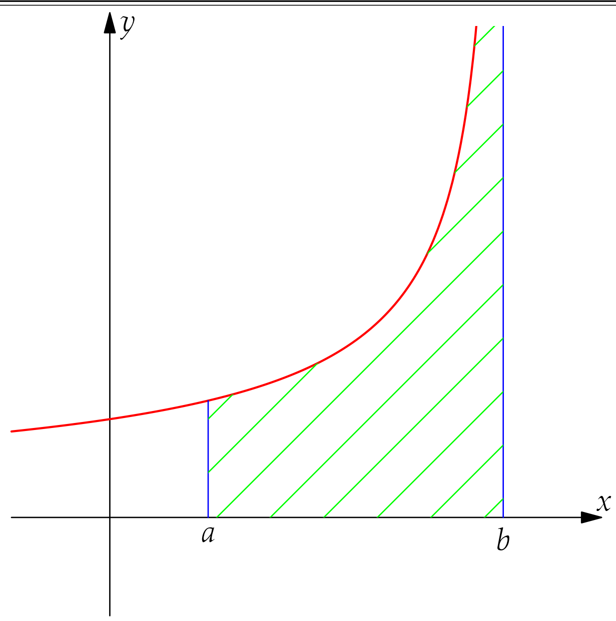

Figure 1 – **Intégrale généralisée en un point fini**

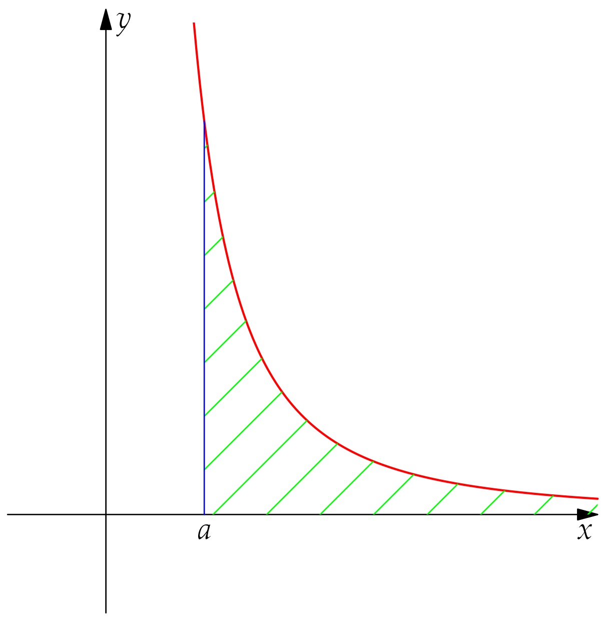

Figure 2 – **Intégrale généralisée à l'infini**

Notons que cette nouvelle notation est parfaitement compatible avec l'ancienne, il suffit de regarder ce qui se passe quand f est continue sur $[a, b]$.

Définition : Soit f localement intégrable sur $[a,+\infty[$.
On dit l'intégrale de f sur $[a,+\infty[$ **converge** ou **existe**

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,dt \text{ existe (au sens de limite finie).}$$

On note cette limite $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$, ce qui est **nouvelle** notation.

Définition : Quand une intégrale ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.
La nature d'une intégrale généralisée est le fait qu'elle converge ou qu'elle diverge.

Quand on a une intégrale, il nous faut maintenant déterminer, au départ, s'il s'agit d'une intégrale simple ou d'une intégrale généralisée.

- A une borne infinie, c'est toujours une intégrale généralisée.
- A une borne finie, il faut regarder au moins si la fonction est définie, ou pas.

Dans le cas où les théorèmes qui suivent se révèlent inapplicables ou difficiles à appliquer, on peut **toujours essayer** de travailler en primitive, sans bornes aux intégrales, et calculer au bout du compte les limites de ces primitives... Cela est même quelquefois indispensable, en particulier avec les intégrations par parties. Après tout, on ne fait alors que revenir à la définition qu'on vient de donner.

1.3. Exemples fondamentaux

Théorème : (Riemann)

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha < 1$$

On a la même chose en un point a :

$$\int_a^b \frac{1}{|t-a|^\alpha}\,dt \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha < 1$$

Théorème : (Riemann)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Théorème : $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt$ converge.

Théorème : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 0$.

Démonstration : On cherche pour chacune de ces fonctions une primitive, ce qui est facile. On cherche ensuite à quelle condition cette primitive a une limite finie à la borne considérée. ■

1.4. Limite d'une application et convergence de son intégrale

a/ Limite finie en un point fini : faux problème

Théorème : f localement intégrable sur $[a,b[$, borné, telle que f est prolongeable par continuité en b, c'est à dire telle que f a une limite finie en b^-, alors : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Démonstration : f est prolongeable par continuité en b^-, on note $\widetilde{f}$ la prolongée sur $[a,b]$, pour $x \in]a,b[$, $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t$ qui tend vers l'intégrale simple $\int_a^b \widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t$ par continuité de la primitive.
Ce qui prouve que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. ■

Exemple : $\int_0^1 \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

b/ Limite non nulle à l'infini

Théorème : Soit f localement intégrable sur $[a,+\infty[$, on a alors :

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) \quad \textbf{existe} \text{ et est } \textbf{non nulle} \quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{diverge}$$

Démonstration : Si la limite est finie et non nulle, le critère d'équivalence entre fonctions de signe constant donne le résultat.
Si la limite est infinie, la fonction est de signe constant et sa valeur absolue est plus grande que 1 dont l'intégrale diverge. ■

c/ Autres cas

Dans **tous les autres cas**, on veillera donc à ne pas confondre :
- la convergence de la **fonction** au point considéré, et
- la convergence de son **intégrale.**

Les deux notions sont **indépendantes**... comme le prouve le tableau page ci-contre :

1.5. Relation de Chasles des intégrales convergentes

Théorème :
f localement intégrable sur $[a,b[$ avec $c \in]a,b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature,
et, **si elles convergent**, on a : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Démonstration : Il suffit d'écrire la relation de Chasles pour les intégrales simples entre a et x et de passer à la limite quand $x \to b^-$ ■

On a bien sûr le même théorème sur tous les autres types d'intervalles.

TABLE 1 – **Limite d'une fonction et convergence de son intégrale**

Intégrale	Singularité	Limite de la fonction	Convergence de l'intégrale
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$	$+\infty$	0	oui
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$	$+\infty$	0	non
$\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$	0	$+\infty$	oui
$\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$	0	$+\infty$	non

1.6. Cas de problème aux deux bornes

Il se peut que l'intégrale soit généralisée aux 2 bornes. Il faut traiter une borne à la fois. On coupe l'intégrale en 2 arbitrairement en un point c.
On dira que l'intégrale converge $\Leftrightarrow$ chacune des 2 intégrales converge.
Par exemple $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\Leftrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

1.7. Linéarité des intégrales convergentes

Théorème : f, g dont les intégrales convergent sur I, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors
$\lambda.f + \mu.g$ a une intégrale convergente sur I et : $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} (\lambda.f + \mu.g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_{\mathrm{I}} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration : C'est un simple passage à la limite sur les primitives ■

2. Intégrale des fonctions positives

Ce sont bien sûr des fonctions à valeurs réelles.

2.1. Critère de comparaison

Théorème : $\forall t \in [a, b[, \quad 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \Rightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge} \Rightarrow \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge}$$

Théorème : $\forall t \in [a,+\infty[,\quad 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$

$$\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$
$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge } \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge}$$

Démonstration : A chaque fois, seule la première assertion est à montrer. Soit F et G les primitives de f et g qui s'annulent en a.
On a G qui est croissante majorée car l'intégrale de g converge.
D'autre part, en tout point t de I, $\mathrm{F}(t) \leqslant \mathrm{G}(t)$ et F est aussi croissante.
Ceci prouve que F est croissante majorée et donc converge. Enfin, l'intégrale de f converge sur I. ■

Exemple : On va déterminer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
La fonction $t \to \dfrac{\sin^2 t}{1+t^2}$ est continue, donc localement intégrable sur $[0,+\infty[$. On a un problème de convergence, ou une singularité, en $+\infty$.
Par ailleurs, elle est **positive** et on va montrer la convergence de l'intégrale en utilisant le critère de comparaison : $\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{\sin^2 t}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$. Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge par existence d'une limite finie à la primitive $\arctan t$ en $+\infty$.
Ceci prouve que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

2.2. Critère d'équivalence

Théorème :

$$\left.\begin{array}{r} f(t) \underset{b^-}{\sim} g(t) \\ f(t) \text{ de signe constant au voisinage de } b^- \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ sont de même nature.}$$

Théorème :

$$\left.\begin{array}{r} f(t) \underset{+\infty}{\sim} g(t) \\ f(t) \text{ de signe constant au vois. de } +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ sont de même nature.}$$

Démonstration : Compte tenu de l'équivalence,
il existe a' tel que sur $[a',b[$ (ou sur $[a',+\infty[$), on a $\frac{1}{2}g(t) \leqslant f(t) \leqslant 2g(t)$.
Le caractère local de la convergence d'une intégrale, le critère de comparaison et la linéarité fournissent le résultat. ■

Exemple : On va déterminer la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{t}}{t}\,\mathrm{d}t$.
La fonction $t \to \dfrac{\sin\sqrt{t}}{t}$ est continue, donc localement intégrable sur $]0,1]$. On a un problème de convergence, ou une singularité, en 0.
Par ailleurs, elle est **positive** et on va montrer la convergence de l'intégrale en utilisant le critère d'équivalence :
$\dfrac{\sin\sqrt{t}}{t} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge par existence d'une limite finie à la primitive $2\sqrt{t}$ en 0.

Ceci prouve que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

2.3. Théorème des 3 conditions

Théorème : $\left.\begin{array}{r} \forall t\in[a,b[,\quad f(t)\geqslant 0 \\ \text{f } \textbf{continue} \text{ sur } [a,b[\\ \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \\ \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall t\in[a,b[,\quad f(t)=0$

b peut être une borne finie ou $+\infty$, on a bien sûr le même théorème sur $]a,b]$, que a soit fini ou $-\infty$. On utilise souvent ce théorème, par exemple quand on a un produit scalaire défini par une intégrale, pour montrer le caractère défini-positif de la forme quadratique.

3. Intégrales absolument convergentes

3.1. Intégrale absolument convergente

Définition : f localement intégrable sur I, à valeur dans $\mathbb{K}$, on dit que l'intégrale de f est absolument convergente $\Leftrightarrow$ l'intégrale de $|f|$ converge absolument.

Exemple : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

3.2. Condition suffisante d'intégrabilité

Théorème : f localement intégrable sur I, dont l'intégrale converge absolument sur I, alors l'intégrale de f converge sur I et : $\displaystyle\left|\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{\mathrm{I}} |f(t)|\,\mathrm{d}t$

Démonstration : On va le montrer pour une fonction qui est à priori à valeurs complexes.

- Comme $|\mathrm{Re}\, f| \leqslant |f|$ et $|\mathrm{Im}\, f| \leqslant |f|$, par linéarité, il suffit de le montrer pour les fonctions à valeurs réelles.
- Pour f à valeurs réelles, on note $f_+ = \max(f,0)$ et $f_- = \max(-f,0)$.
  Ce sont deux fonctions positives, $0 \leqslant f_+ \leqslant |f|$ et $0 \leqslant f_- \leqslant |f|$, dont l'intégrale converge par majoration.
  Et comme $f = f_+ - f_-$, on obtient par linéarité l'intégrale de f qui converge sur I.

■

3.3. Semi-convergence

Définition : On dit que

l'intégrale de f est semi convergente sur I $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{l'intégrale de } f \text{ sur I converge, et} \\ \text{l'intégrale de } |f| \text{ sur I diverge} \end{array}\right.$

Exemple : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente.

3.4. Majoration en module

Théorème : Si on a g positive, d'intégrale convergente sur I, et f continue par morceaux sur I, telle que : $0 \leqslant |f| \leqslant g$ sur I,
alors, l'intégrable de f sur I converge et : $\left|\int_{\mathrm{I}} f\right| \leqslant \int_{\mathrm{I}} g$

Ceci nous donne alors le procédé très utile suivant :

- Si on a $\alpha < 1$ tel que $\lim_{t\to 0} t^\alpha f(t) = 0$, alors $|f(t)| = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$, et $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.
- Si on a $\alpha > 1$ tel que $\lim_{t\to +\infty} t^\alpha f(t) = 0$, alors $|f(t)| = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$, et $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.

> Ceci n'est pas un théorème, il faut à chaque fois refaire la démonstration...
> Il faut y observer qu'on travaille avec une fonction positive ou montrer la convergence absolue.

> On se sert souvent de ce procédé quand on a des « mélanges » de logarithmes, de fonctions puissances et d'exponentielles...

Exemple : On va déterminer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $t \to \frac{\ln t}{1+t^2}$ est continue, donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$. On a un problème de convergence, ou une singularité, en 0 et en $+\infty$.
En 0, $\sqrt{t}\left|\frac{\ln t}{1+t^2}\right|$ tend vers 0, d'où $\left|\frac{\ln t}{1+t^2}\right| = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et ainsi, par comparaison, $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.
En $+\infty$, $t^{3/2}\left|\frac{\ln t}{1+t^2}\right|$ tend vers 0, d'où $\left|\frac{\ln t}{1+t^2}\right| = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ et ainsi, par comparaison, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.
Ceci prouve que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

3.5. Cas des fonctions de signe constant

Théorème : Si f est de signe constant sur $[a,b[$, alors : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_a^b -f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
La convergence de l'intégrale équivaut à sa convergence absolue.

Démonstration : f ou $-f$ est positive, l'une des deux est : $|f|$.
La linéarité des intégrales convergentes permet de conclure. ■

> Quand on utilise ce théorème, on écrit **clairement** que dans le cas d'une fonction **de signe constant**, la convergence de son intégrale équivaut à sa convergence absolue.

3.6. Intégrabilité au sens fort sur I

Définition : Une fonction f, continue par morceaux sur un intervalle I qui n'est pas un segment est **intégrable** sur I (au sens fort) si elle vérifie l'une des deux conditions suivantes équivalentes :
- f admet sur I une intégrale absolument convergente ;
- il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout segment J inclus dans I, on ait : $\displaystyle\int_I |f(t)|\,dt \leqslant M$.

Définition : Si I est un intervalle quelconque, et f intégrable sur I,
On appelle **intégrale** de f sur I et on note $\displaystyle\int_I f$
- si I est un segment, l'intégrale de f sur I ;
- si I n'est pas un segment, son intégrale impropre sur I.

> L'intégrale au sens fort revient, en fait :
> - à une intégrale simple sur un segment I ;
> - ou à une intégrale absolument convergente sur I.

4. Intégration et Dérivation

4.1. Intégration par parties

Théorème :

$$\left.\begin{array}{l} u \text{ et } v \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [a,b[\\ \lim\limits_{t\to b^-} u(t)v(t) \text{ existe et est finie} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b u(t)v'(t)\,dt \text{ et } \int_a^b u'(t)v(t)\,dt \text{ sont de même nature}$$

et **si elles convergent** : $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\,dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^{b^-} - \int_a^b u'(t)v(t)\,dt$

Théorème :

$$\left.\begin{array}{l} u \text{ et } v \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [a,+\infty[\\ \lim\limits_{t\to +\infty} u(t)v(t) \text{ existe et est finie} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^{+\infty} u(t)v'(t)\,dt \text{ et } \int_a^{+\infty} u'(t)v(t)\,dt \text{ sont de même nature}$$

et **si elles convergent** : $\displaystyle\int_a^{+\infty} u(t)v'(t)\,dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u'(t)v(t)\,dt$

> Ces théorèmes sont à utiliser avec soin. La rédaction se fait **toujours** en deux temps
> - une partie sur la nature des intégrales et
> - en cas de convergence, l'égalité proprement dite.

Démonstration : On le montre dans le premier cas, la démonstration est la même dans les autres cas.
On a toujours : $\displaystyle\int_a^x u(t)v'(t)\,dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^x - \int_a^x u'(t)v(t)\,dt$
Si $u(x)v(x)$ a une limite finie quand $x \to b^-$, les deux intégrales ont toutes les deux une limite finie ou toutes les deux pas de limite finie. Elles sont donc de même nature.
Dans le cas où elles convergent, en passant à la limite quand $x \to b^-$, on obtient l'égalité annoncée. ■

Exemple : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge.
En effet $\dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$, donc localement intégrable sur $[1,+\infty[$

C'est une intégrale généralisée en $+\infty$.
Montrons sa convergence grâce au théorème d'intégration par parties.
On pose $u(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v(t) = -\cos t$, on a : $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t} \times -\cos t = 0$ qui est une limite finie,
ce qui prouve que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
Or $\left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge par Riemann.
Donc, par utilisation des critères de Riemann, de comparaison, de convergence absolue et d'intégration par parties, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

> Comme le prouve l'exemple précédent, l'intégrabilité au sens fort, c'est à dire la convergence absolue de l'intégrale, ne se conserve pas dans une intégration par parties.

4.2. Changement de variable

Théorème : β étant une borne finie ou $+\infty$,

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ continue sur I} \\ \varphi \text{ monotone, bijective, de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [\alpha,\beta[\\ \varphi([\alpha,\beta[) \subset \mathrm{I} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\,\mathrm{d}u \text{ sont de}$$

même nature,

et **si elles convergent** : $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\,\mathrm{d}u$

> Ce théorème est à utiliser avec soin. La rédaction se fait **toujours** en deux temps
> - une partie sur la nature des intégrales et
> - en cas de convergence, l'égalité proprement dite.

> Le changement de variable est donc $u = \varphi(t)$ dont on vérifiera qu'il est bien monotone de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle de variation de t.

Démonstration : On a toujours : $\displaystyle\int_\alpha^x f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(x)} f(u)\,\mathrm{d}u$
Ce sont deux fonctions continues de x et égales.
Elles ont donc toutes les deux une limite finie ou pas de limite finie quand $x \to \beta$.
Dans le cas où elles ont une limite finie, par passage à la limite, on a l'égalité annoncée. ■

> Un changement de variable peut transformer une intégrale simple en intégrale généralisée et vice-versa. Dans ce cas, **à condition de le remarquer**, il n'y a pas de problème d'intégrabilité.
> Regardons par exemple $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{2+\cos t}\,\mathrm{d}t$ pour lequel $u = \tan\frac{t}{2}$ donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ldots\,\mathrm{d}u$.

Exemple : On va déterminer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(e^t\right)\mathrm{d}t$.

La fonction $t \to \sin\left(e^t\right)$ est continue, donc localement intégrable sur $[0,+\infty[$. On a un problème de convergence, ou une singularité, en $+\infty$.
On va montrer la convergence de cette intégrale au moyen d'un changement de variable : on pose $u = e^t$ qui est bien **monotone de classe** $\mathscr{C}^1$, $\sin\left(e^t\right)\mathrm{d}t = \dfrac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ et ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(e^t\right)\mathrm{d}t$ est de même

nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$.

Par ailleurs, on a montré que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ converge et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(e^t\right)\mathrm{d}t$ converge.

4.3. Travail en primitives

On peut, au besoin, **se passer des théorèmes** d'intégration par parties et de changement de variable dans les intégrales généralisées en travaillant en **primitives**. On revient alors aussi à la définition de la convergence d'une intégrale généralisée par limite finie d'une primitive…

5. Intégrales dépendant d'un paramètre

Il y a deux théorèmes où la fonction dépend d'un paramètre. Ces deux théorèmes vont être admis.
Il s'agit d'étudier la continuité et la classe $\mathscr{C}^1$ de :

$\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ ou de :

$\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$

selon que l'on intégre sur $[a,b[$ ou sur $[a,+\infty[$.
Dans tous les cas, J est l'intervalle de variation de x.

5.1. Continuité

Théorème : F définie par $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$

$$f : \left.\begin{array}{r} \mathrm{J}\times[a,b[\ \to \mathbb{K} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{array}\right\}$$ avec f continue sur $\mathrm{J}\times[a,b[$,

Si il existe φ telle que : $\forall x \in \mathrm{J}$, $\forall t \in [a,b[$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$, et $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge,

alors F est définie et continue sur J.

Théorème : F définie par $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$

$$f : \left.\begin{array}{r} \mathrm{J}\times[a,+\infty[\ \to \mathbb{K} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{array}\right\}$$ avec f continue sur $\mathrm{J}\times[a,+\infty[$,

Si il existe φ telle que : $\forall x \in \mathrm{J}$, $\forall t \in [a,+\infty[$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$, et $\displaystyle\int_a^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge,

alors F est définie et continue sur J.

Il faut vérifier avec soin les hypothèses du théorème. Parfois, la fonction φ est « annoncée » dans les questions précédentes. La convergence de cette intégrale quand x est fixé s'obtient directement par convergence absolue et comparaison à la fonction φ. Le théorème, quand il s'applique, montre donc cette convergence...

Remarque : En fait, la continuité de f comme fonction de deux variables n'est pas indispensable, il suffit que f soit continue par rapport à x et continue par morceaux par rapport à t.
En pratique, ce cas ne se pose presque jamais...

Exemple : Soit F définie par $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2}$ dont on va montrer qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$(x,t) \to \dfrac{1}{t^2+x^2}$ est bien continue sur $\mathbb{R}_+^* \times [0,+\infty[$ comme fonction de 2 variables.
On prend maintenant $a > 0$ et $x \in [a,+\infty[$, $\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times [0,+\infty[$, $\left|\dfrac{1}{t^2+x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2+a^2} = \varphi(t)$ (qui ne dépend pas de x), et d'autre part $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
Ceci prouve que F est continue sur tous les intervalles $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.
Enfin, F est continue sur $]0,+\infty[$

5.2. Classe $\mathscr{C}^1$

Théorème : F définie par $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$

$f : \left.\begin{array}{r} \mathrm{J} \times [a,b[\to \mathbb{K} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{array}\right\}$ avec :

- f et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continues par morceaux et f intégrable (au sens fort) par rapport à t sur $[a,b[$;
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue par rapport à x sur J

Si il existe φ telle que : $\forall x \in \mathrm{J}$, $\forall t \in [a,b[$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$, et $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge,
alors F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J et : $\mathrm{F}'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème : F définie par $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$

$f : \left.\begin{array}{r} \mathrm{J} \times [a,+\infty[\to \mathbb{K} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{array}\right\}$ avec :

- f et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continues par morceaux et f intégrable (au sens fort) par rapport à t sur $[a,+\infty[$;
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue par rapport à x sur J

Si il existe φ telle que : $\forall x \in \mathrm{J}$, $\forall t \in [a,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$, et $\displaystyle\int_a^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge,
alors F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J et : $\mathrm{F}'(x) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

> Il est important que φ **ne dépende pas de** x.
> C'est fonction réelle positive dont l'intégrale converge.

Remarque : Lisez bien les énoncés, on n'a pas à utiliser le théorème de continuité pour montrer la classe $\mathscr{C}^1$.

Exemple : On reprend l'exemple précédent avec F définie par $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2}$ dont on va montrer maintenant qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a déjà montré la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x,t)|\,\mathrm{d}t$ dans l'étude de la continuité.
$(x,t) \to \dfrac{1}{t^2+x^2}$ admet une dérivée partielle par rapport à x qui est $\dfrac{-2x}{(t^2+x^2)^2}$ continue sur $\mathbb{R}_+^* \times [0,+\infty[$

comme fonction de 2 variables.
On prend maintenant $A > a > 0$ et $x \in [a, A]$, $\forall (x,t) \in [a,A] \times [0,+\infty[$, $\left|\dfrac{-2x}{(t^2+x^2)^2}\right| \leqslant \dfrac{2A}{(t^2+a^2)^2} = \psi(t)$ (qui ne dépend pas de x), et d'autre part $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2A}{(t^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
Ceci prouve que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tous les intervalles $[a, A]$ avec $A > a > 0$, et que $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-2x}{(t^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}t$.
Enfin, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et vérifie $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-2x}{(t^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

5.3. Ensemble de définition

L'ensemble de définition d'une fonction F de la variable x est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on peut effectivement calculer $F(x)$.

Ainsi, si on a :
- $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ ou,
- $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ ou encore,
- $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

L'ensemble de définition de F est l'ensemble des valeurs de x telles que :
- l'intégrale est simple, ou bien,
- l'intégrale est généralisée et convergente.

Exemple : On va chercher l'ensemble de définition de F définie par : $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(x^2+t^2\right)\mathrm{d}t$
Pour $x \neq 0$, l'intégrale est une intégrale simple.
Pour $x = 0$, on a une intégrale généralisée avec un problème de convergence en 0. En 0, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(t^2\right)\mathrm{d}t$ converge car l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
L'ensemble de définition de F est donc $\mathbb{R}$.

6. Un procédé hors programme : la « règle » $t^\alpha f(t)$

Ceci doit être argumenté à chaque fois et est efficace quand on a des produits de logarithmes, de puissance et d'exponentielles.

6.1. En 0

Si on a un $\alpha < 1$ tel que $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha f(t) = 0$, alors pour $t \leqslant t_0$, cette quantité est inférieure à 1.
Ce qui donne $|f(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^\alpha}$ sur $]0, t_0]$.
En utilisant les fonctions de Riemann, la comparaison et la convergence absolue, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

6.2. En $+\infty$

Si on a un $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{t\to +\infty} t^\alpha f(t) = 0$, alors pour $t \geqslant t_0$, cette quantité est inférieure à 1.

Ce qui donne $|f(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^\alpha}$ sur $[t_0, +\infty[$.

En utilisant les fonctions de Riemann, la comparaison et la convergence absolue, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

7. How to...

7.1. Intégrale généralisée et intégrabilité (au sens fort)

On a vu, ce qui n'est pas très pratique à priori, qu'on avait :
- la notion d'intégrale impropre ;
- et celle d'intégrabilité (au sens fort).

En pratique, même si les théorèmes de continuité et de dérivabilité d'une intégrale à paramètre relèvent de la notion d'intégrabilité au sens fort, il suffit de savoir que :
- l'intégrabilité (au sens fort) de f sur I entraîne la convergence de $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f$;
- l'intégrabilité (au sens fort) de f sur I équivaut à la convergence absolue de $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f$, c'est à dire celle de $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} |f|$.

7.2. Nature d'une intégrale généralisée

On considère donc l'intégrale : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, avec a ou b qui peuvent être infinis.

a/ Problèmes de convergence

i) Identification

- A une borne infinie, il y a toujours un problème de convergence ;
- à une borne finie,
  - regarder si la fonction est définie et continue, il n'y a alors pas de problème ;
  - sinon, regarder si elle est prolongeable par continuité, c'est alors un faux problème ;
  - et sinon, il faut traiter le problème de convergence.

Les propriétés requises pour étudier une convergence sont à considérer sur un intervalle qui contient la borne et que l'on choisit comme on veut.

ii) Refus d'étude

Si on a à calculer l'intégrale en cherchant une primitive (lire l'énoncé !), on peut toujours revenir à la définition qui dit qu'une intégrale converge si et seulement si une primitive a une limite finie à la borne considérée.

b/ Cas particulier

i) Croissances comparées

Si la fonction est un mélange de puissances, logarithmes et exponentielles, privilégier, en refaisant la démonstration, la règle $t^\alpha f(t)$.

ii) Changement de variable

Si un changement de variable, monotone de classe $\mathscr{C}^1$, saute aux yeux, il fournit une autre intégrale
- plus simple (?)
- et de même nature.

c/ Fonction positive ou de signe constant

Essayer d'utiliser les règles :
- de comparaison ;
- d'équivalence ;
- et de Riemann.

Si la fonction f est négative, $-f$ est positive et son intégrale est de même nature que celle de f.

d/ Fonction de signe variable

Essayer de penser :
- à la convergence absolue ;
- ou à une intégration par parties pour avoir une autre intégrale plus facile à étudier.

e/ Ne pas oublier...

> On travaille sur la **fonction** (majoration, équivalence, valeur absolue, primitive...)
> et on conclut sur la convergence de l'**intégrale** !

7.3. Fonction définie par une intégrale généralisée à paramètre

Il s'agit d'étudier la continuité ou la classe $\mathscr{C}^1$ de : $\mathrm{F}(x) = \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$.
On s'est assuré qu'il s'agit bien d'une intégrale généralisée !
Pour rechercher φ, on **majore toujours en valeur absolue**.

> Si vous en avez, essayez de conserver des exponentielles quand vous majorez !

Si on demande un résultat pour x qui n'appartient pas à un segment, on peut toujours majorer sur un segment arbitraire inclus dans l'ouvert ou le semi-ouvert. Exemple :
- Pour $x \in]0,+\infty[$, il suffit de travailler sur $[a,\mathrm{A}]$ avec : $0 < a < \mathrm{A}$;
- Pour $x \in]0,1]$, il suffit de travailler sur $[a,1]$ avec : $0 < a < 1$;
- Pour $x \in [0,1[$, il suffit de travailler sur $[0,a]$ avec : $0 < a < 1$.

Ensuite, il faut bien sûr conclure en deux temps :
- sur le segment sur lequel vous avez majoré, puis
- sur l'intervalle demandé,

en argumentant l'aspect local de la continuité ou de la classe $\mathscr{C}^1$.

> On travaille ici sur la **fonction de 2 variables** (majoration en valeur absolue...)
> et on conclut sur la continuité, classe $\mathscr{C}^1$, de l'**intégrale** ... qui est, elle, une fonction d'une seule variable !

8. Compléments

8.1. Colbert, lycée numérique

Les mots clefs sont les mêmes que pour les intégrales simples, ceci avec tous les logiciels de calcul formel. . .

a/ Maple

Ici, « `infinity` » désigne au besoin $+\infty$.

Pour une intégrale généralisée, Maple calcule la valeur s'il peut le faire, indique parfois que l'intégrale diverge, mais répond aussi parfois « `undefined` » quand il n'arrive pas à conclure sur la convergence.

b/ HP 40G-GS

Si la calculatrice sait calculer l'intégrale, elle donne le résultat, sinon, la réponse est la question !
Notons qu'on a le signe ∞ par *shift-0*.

c/ HP 50G

Si la calculatrice sait calculer l'intégrale, elle donne le résultat, sinon, la réponse est la question !
Notons qu'on a le signe ∞ sur la touche `0`, L10C2.

d/ TI 89

Si la calculatrice sait calculer l'intégrale, elle donne le résultat, sinon, la réponse est la question !
Notons qu'on a le signe ∞ sur la touche `CATALOG`, L4C3.

e/ TI N-inspire CAS

Si la calculatrice sait calculer l'intégrale, elle donne le résultat, sinon, la réponse est la question !

f/ ClassPad 300

Si la calculatrice sait calculer l'intégrale, elle donne le résultat, sinon, la réponse est la question !

8.2. Les mathématiciens du chapitre

Euler Léonard 1707-1783 Entre autres, c'est Euler qui le premier étudiera des fonctions définies par une intégrale généralisée à paramètre...