Sommaire

L'objet de l'étude des séries numériques est de donner un sens à des sommes infinies de nombres réels ou complexes et, éventuellement, de les calculer.

1. Convergence des Séries Numériques

1.1. Nature d'une série numérique

Définition : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
On appelle **suite des sommes partielles** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

Définition :
On dit que la **série de terme général** u_n**, converge** $\Leftrightarrow$ la suite des sommes partielles $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Sinon, on dit qu'elle **diverge**.

Notation : La **série de terme général** u_n se note $\sum u_n$.

Définition : Dans le cas où la série de terme général u_n converge, la limite, notée s, de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **somme** de la série et on note : $s = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$.
Le reste d'ordre n de la série est alors noté r_n et il vaut : $r_n = s - s_n$.

Définition : La **nature** d'une série est le fait qu'elle converge ou diverge.

Étudier une série est donc simplement étudier une suite, la suite des sommes partielles de (u_n). Le but de ce chapitre est de développer des techniques particulières pour étudier des séries sans nécessairement étudier la suite des sommes partielles.
Dans certains cas, on reviendra à la définition en étudiant directement la convergence de la suite des sommes partielles.

> La convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes...

1.2. Exemple fondamental : les séries géométriques

Théorème : La série de terme général x^n converge $\Leftrightarrow |x| < 1$.
De plus, la somme est : $s = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.

Démonstration : $\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ pour $x \neq 1$.
$\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ n'a de limite finie que si $|x| < 1$, cette limite est alors $\dfrac{1}{1-x}$.
D'autre part, pour $x = 1$, $\sum_{k=0}^{n} x^k = n+1$ diverge. ■

> La raison d'une suite géométrique est le coefficient par lequel il faut multiplier chaque terme pour obtenir le suivant.
> La somme des termes d'une série géométrique convergente est donc : $\dfrac{\text{« le premier terme »}}{1-\text{« la raison »}}$.
> Ceci prolonge et généralise la somme des termes d'une suite géométrique qui est :
>
> $$\frac{\text{« le premier terme »} - \text{« le premier terme manquant »}}{1-\text{« la raison »}}$$
>
> Quand la série converge, il n'y pas de termes manquants... La formule est la même.

1.3. Condition nécessaire élémentaire de convergence

Théorème : $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Démonstration : $\sum u_n$ converge $\Rightarrow (s_n)$ converge vers $s \Rightarrow (s_{n+1})$ converge vers s
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_{n+1} - s_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. ■

> Si une série converge, son terme général tend vers 0.
> Dans le cas où le terme général ne tend pas vers 0, on dit que la série **diverge grossièrement**.

1.4. Suite et série des différences

Théorème : La suite (v_n) converge $\Leftrightarrow$ la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge.

Démonstration : On considère $\sum (v_{n+1} - v_n)$, sa suite des sommes partielles est (s_n) avec

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0$$

Les suites (s_n) et (v_{n+1}) sont de même nature, il en est de même de (v_n). ■

2. Opérations sur les Séries Convergentes

2.1. Somme de 2 séries

Théorème : $\sum u_n$ et $\sum u'_n$ convergent et ont pour somme s et s'
$\Rightarrow \sum (u_n + u'_n)$ converge et a pour somme $(s + s')$.

Démonstration : On applique simplement le théorème équivalent sur les suites, appliqué bien sûr aux suites des sommes partielles. ■

2.2. Produit par un scalaire

Théorème : $\sum u_n$ converge et est de somme $s, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \sum (\lambda u_n)$ converge et est de somme λs.

Démonstration : On applique encore le théorème équivalent sur les suites à la suite des sommes partielles. ■

Il y a bien sûr une notion sous-jacente d'espace vectoriel des séries convergentes.

3. Séries à termes positifs

3.1. Séries à termes positifs

Définition : On dit qu'une série $\sum u_n$ est une série à termes positifs $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.

Définition : On dit qu'une série $\sum u_n$ est une série à termes positifs à partir d'un certain rang

$$\Leftrightarrow \exists\, \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant \mathrm{N}, u_n \geqslant 0$$

3.2. Critère de comparaison

> **Théorème :** $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries positives à partir d'un certain rang N, telles que
>
> $$\forall n \geqslant \mathrm{N},\ u_n \leqslant v_n$$
>
> Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
> Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration : Seule la première assertion est à montrer, l'autre est équivalente.
On le montre pour les séries positives (N = 0).
On pose $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $s'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $s' = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$, on a $s_n \leqslant s'_n$.
Les suites (s_n) et (s'_n) sont croissantes et la deuxième converge. On a donc $s'_n \leqslant s'$. Ce qui prouve que (s_n) est croissante majorée et donc converge.
Pour le cas de séries positives à partir du rang N, on considère les sommes partielles $s_n = \sum_{k=\mathrm{N}}^{n} u_k$... ■

Exemple : Etudions la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n\, 2^n}$.
C'est une série à termes positifs (ou plus simplement positive), on va pouvoir utiliser le critère de comparaison.
A l'infini, $\frac{\ln n}{n}$ tend vers 0 et donc $\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ est une suite bornée par A. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \frac{\ln n}{n} \leqslant \mathrm{A}$
ce qui donne $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \frac{\ln n}{n\, 2^n} \leqslant \frac{\mathrm{A}}{2^n}$ qui est le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc convergente.

Ceci prouve que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln n}{n2^n}$ converge.

3.3. Critère d'équivalence

Théorème : $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries positives à partir d'un certain rang N, telles que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration : A partir d'un certain rang N, on a $0 \leqslant \frac{1}{2}u_n \leqslant v_n \leqslant 2u_n$.

Si $\sum u_n$ converge, $\sum 2u_n$ converge et donc $\sum v_n$ converge.

Si $\sum v_n$ converge, $\sum \frac{1}{2}u_n$ converge et donc $\sum u_n$ converge. ■

> On peut remarquer que le critère d'équivalence est, par linéarité, applicable à des séries de signe constant à partir d'un certain rang. En effet, la convergence de $\sum u_n$ équivaut à celle de $\sum -u_n$.
> Par ailleurs, on veillera à appliquer le critère d'équivalence au **terme général** : u_n, et non à la série : $\sum u_n$.

Exemple : Etudions la convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{1+2^n}$.

C'est une série à termes positifs (ou plus simplement positive), on va pouvoir utiliser le critère d'équivalence.

$\dfrac{1}{1+2^n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2^n}$ qui est le terme général d'une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, donc convergente.

Ceci prouve que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{1+2^n}$ converge.

3.4. Comparaison à une intégrale impropre

Théorème : Soit f une application **positive et décroissante** sur $[a,+\infty[$,
alors la série $\sum f(n)$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
Et si elles convergent, $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

Démonstration : Remarquons d'abord que, comme $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante,
$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\Leftrightarrow$ la suite $\left(\displaystyle\int_a^p f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ converge.
On prendra pour la démonstration $a=0$. Comme f décroît sur $[n,n+1]$,

$$\forall x \in [n,n+1],\ f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$$

et en intégrant, comme on peut le voir sur la figure 1, page ci-contre : $f(n+1) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n)$.

d'où en sommant $\sum\limits_{n=1}^{p} f(n) \leqslant \int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum\limits_{n=0}^{p-1} f(n)$, ce qui assure le résultat. ■

> On a tout intérêt à mémoriser cette figure 1 qui, associée à la relation de Chasles, fournit démarche et résultat !

Exemple : Etudions la convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{1+n^2}$.

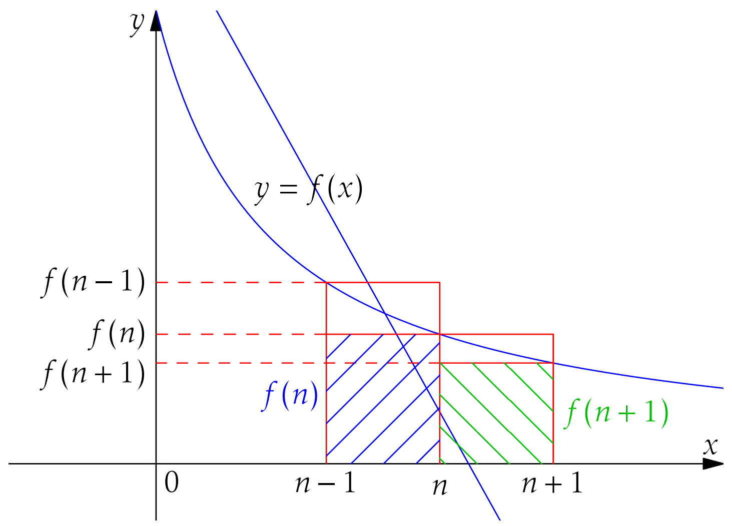

Figure 1 – **Comparaison série-intégrale**

f définie par $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ est positive, décroissante sur $[0, +\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et est de même nature que la série étudiée.
Ceci prouve que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$ converge.

3.5. Règle de Riemann

Théorème : $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Ce sont les séries de Riemann.
Démonstration : On compare cette série avec $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et le résultat est immédiat. ■

Ceci nous donne la règle de Riemann.

Théorème : $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{k}{n^\alpha}$, alors : $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Démonstration : Il suffit d'utiliser le critère d'équivalence et le théorème précédent. ■

3.6. Règle de d'Alembert

Théorème : $\sum u_n$ une série à termes positifs non nuls (à partir d'un certain rang) telle que : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$
- si $l > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement,
- si $l < 1$, $\sum u_n$ converge,
- et si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

> Ce théorème est séduisant à priori, mais on tombe très souvent sur le cas douteux. Il s'utilise souvent dans le cadre des séries entières qu'on étudiera dans quelques chapitres.
> Avec les séries numériques, il s'utilise principalement quand on se trouve en présence de factorielles ou de termes de nature géométrique du type : a^n.

Démonstration : Pour $l > 1$, la suite positive (u_n) croit et ne tend donc pas vers 0. On a bien la divergence grossière.
Pour $l < 1$, à partir d'un certain rang N $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1+l}{2}$.
et donc par récurrence très facile, pour $n \geqslant \mathrm{N}$, $u_n \leqslant \left(\dfrac{1+l}{2}\right)^{n-\mathrm{N}} u_\mathrm{N} = \left(\dfrac{1+l}{2}\right)^n \dfrac{u_\mathrm{N}}{\left(\dfrac{1+l}{2}\right)^\mathrm{N}}$.
Cette dernière série est géométrique, le théorème de comparaison entre séries positives fournit le résultat. ■

Exemple : Étudions la convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n!}{n^n}$.
C'est une série à termes **strictement** positifs, on va pouvoir utiliser le critère de d'Alembert.

$$\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)\,n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \underset{+\infty}{\rightarrow} \frac{1}{e} < 1$$

Ceci prouve que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n!}{n^n}$ converge.

4. Séries Absolument Convergentes

4.1. Convergence absolue d'une série numérique

Définition : Une série $\sum u_n$ est **absolument convergente** $\Leftrightarrow \sum |u_n|$ est convergente.
Une série convergente mais non absolument convergente est dite **semi-convergente**.

4.2. Convergence des séries absolument convergentes

Théorème : Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration : Comme $|\mathrm{Re}\, u_n| \leqslant |u_n|$ et $|\mathrm{Im}\, u_n| \leqslant |u_n|$, il suffit par linéarité de le montrer pour les séries à valeur réelle.
Pour celles-ci, on pose $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$.
Les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont positives et $u_n^+ \leqslant |u_n|$, $u_n^- \leqslant |u_n|$ prouvent par comparaison que ces séries convergent.
Comme $u_n = u_n^+ - u_n^-$, on a bien $\sum u_n$ converge. ■

Attention, ceci n'est pas une équivalence, on verra qu'il existe des séries semi-convergentes. L'exemple le plus classique est $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

4.3. Un moyen classique de montrer une convergence absolue de série

Ceci n'est pas un théorème mais un procédé usuel qu'il faut justifier à chaque fois.
Si il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors $|u_n| = o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$, comme $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge, par comparaison, $\sum u_n$ converge absolument.

5. Séries Numériques Réelles Alternées

5.1. Séries alternées

Définition : La série $\sum u_n$ est **alternée** $\Leftrightarrow \sum (-1)^n\, u_n$ est une série de signe constant.
On parle aussi de série alternée à partir d'un certain rang.

Il s'agit donc de séries à valeur réelle.

Exemple : $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée, mais pas $\sum \cos n$.

5.2. Critère spécial des séries alternées

Théorème : $\sum u_n$ une série alternée telle que la suite $(|u_n|)$ est décroissante tendant vers 0 à l'infini.
- Alors, $\sum u_n$ est convergente de somme s et $s \in [s_n, s_{n+1}]$ (ou $[s_{n+1}, s_n]$).
- De plus, avec $r_n = s - s_n$, on a $|r_n| \leqslant |u_{n+1}|$, et r_n est du signe de u_{n+1}.

On dit que la somme de la série est encadrée par 2 termes consécutifs et que le reste de la série est, en valeur absolue, majorée par son premier terme.

Ce théorème est illustré par la figure 2, ci-dessous.

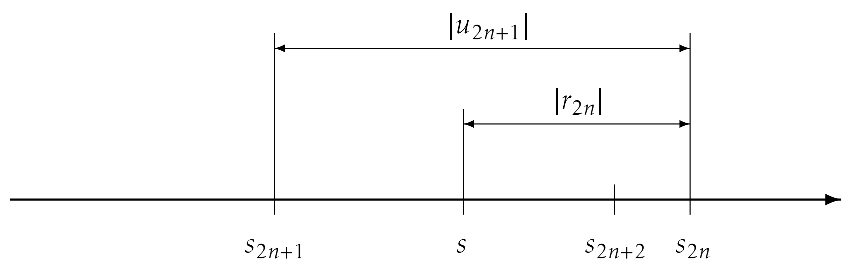

Figure 2 – **Convergence d'une série répondant au critère spécial**

Démonstration : On va faire la démonstration quand u_n est du signe de $(-1)^n$.

$$s_{2n+2} - s_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leqslant 0$$

d'où (s_{2n}) est décroissante.

$$s_{2n+3} - s_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}| \geqslant 0$$

d'où (s_{2n+1}) est croissante.
D'autre part, $s_{2n+1} \leqslant s_{2n} \leqslant s_0 = u_0$. (s_{2n+1}) est croissante majorée, donc convergente.
De même, $s_{2n} \geqslant s_{2n+1} \geqslant s_1$. (s_{2n}) est décroissante minorée, donc convergente.
Comme $s_{2n+1} - s_{2n} = u_{2n+1}$ tend vers 0, ces deux suites sont adjacentes et convergent vers la même limite s.
D'où, par monotonie $s_{2n+1} \leqslant s \leqslant s_{2n}$ et $s_{2n+1} \leqslant s \leqslant s_{2n+2}$. C'est à dire : $|r_n| \leqslant |u_{n+1}|$ que n soit pair ou impair. ∎

Exemple : $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée clairement convergente par application du critère spécial des séries alternés.

Il faut bien vérifier qu'on applique **scrupuleusement** le critère spécial.

> Le critère spécial des séries alternées **ne s'applique pas** à des équivalents.
> On écrit parfois $u_n = v_n + w_n$ avec $\sum v_n$ alternée répondant au critère spécial des séries alternées et $\sum w_n$ absolument convergente.

Exemple : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$ est une série alternée telle que : $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ avec $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui converge par application simple du critère spécial des séries alternées.
Cependant, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$ diverge.
En effet,

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \underbrace{\underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\text{t.g. série convergente}} + \underbrace{\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}_{\text{t.g. série divergente}}}_{\text{terme général d'une série divergente}}$$

On a bien montré sur un exemple que le critère d'équivalence ne s'applique pas aux séries alternées...

6. Calcul Exact de Sommes de Séries

Pour l'instant, on ne connaît que la somme exacte des séries géométriques.

6.1. Sommation en dominos

On travaillera exclusivement sur un exemple.
Soit la série : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
On montre facilement la convergence car $\frac{1}{n(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente par le critère de Riemann.
Pour le calcul de la somme, on revient en fait à la définition en calculant effectivement la somme partielle.
On a :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

d'où : $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$ quand $n \to +\infty$.
En effet, on peut procéder en dominos :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\ u_2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ u_3 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ \cdots &= \cdots \\ u_n &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Et en sommant, les termes se simplifient en dominos, et on obtient : $s_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$.

On aurait aussi pu réindexer la somme, on reprend le même calcul :
$s_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

6.2. Utilisation de séries entières ou de séries de Fourier

On se reportera à ces chapitres que nous allons bientôt étudier pour calculer des sommes exactes de séries numériques.

7. Calcul Approché de Sommes de Séries

Il est quand même rare de savoir calculer facilement la somme exacte d'une série numérique. Ce qui fait l'importance du calcul approché de ces sommes.

7.1. Principe général

On nous donne une série convergente $s = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et un réel strictement positif ε.
On cherche un rang n tel que le reste d'ordre n, r_n vérifie $|r_n| \leqslant \varepsilon$.
Ensuite, on prendra s_n comme valeur approchée à ε près de s.
On va étudier les façons usuelles de chercher n selon la série.
Sauf dans le premier cas, en général, l'énoncé guide vers la méthode à utiliser...

7.2. Série alternée répondant au critère spécial

Condition : La convergence de la série peut se montrer en utilisant le critère spécial des séries alternées.

> C'est le seul cas que vous devez savoir traiter sans indication.

C'est le cas le plus simple puisqu'on a un théorème. Comme on sait que si $\sum u_n$ vérifie les conditions du critère spécial, $|r_n| \leqslant |u_{n+1}|$,
on cherche simplement n tel que $|u_{n+1}| \leqslant \varepsilon$ et on calcule s_n.
En plus, le théorème nous donne le signe de l'erreur qui est celui de u_{n+1}.

Exemple : $s = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ à 10^{-2} près. Il nous suffit $\frac{1}{n+1} \leqslant 10^{-2}$, c'est à dire $n \geqslant 99$.
$\sum_{n=1}^{99} \frac{(-1)^n}{n}$ est une valeur approchée 10^{-2} près de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
Il suffit de calculer cette somme.

7.3. Autres cas

Ces autres cas sont donnés sur un exemple pour illustrer ce qu'un problème peut vous faire faire... Il n'y a pas, au programme, de théorème sur ce sujet.

a/ Série comparable à une série géométrique positive

Condition : La convergence absolue de la série peut se montrer en utilisant le critère de d'Alembert.

C'est souvent la méthode la plus rapide quand elle est applicable.

Solution : $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = l < 1$, d'où, à partir de N, $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant \lambda < 1$, et donc,

pour $n \geqslant \mathrm{N}$, $|r_n| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \leqslant |u_{n+1}| \dfrac{1}{1-\lambda} \leqslant \dfrac{\lambda^{n-\mathrm{N}+1}}{1-\lambda} |u_\mathrm{N}|$.
Ceci permet le bon rang en majorant cette quantité par ε. Ce rang sera bien sûr au moins égal à N.

Exemple : On cherche $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n+1}$ à 10^{-3} prés.
La convergence de cette série positive est facilement obtenue (par exemple) par équivalence avec une série géométrique.
On a $0 \leqslant u_k \leqslant \dfrac{1}{2^k}$ qui est le terme général d'une série convergente,

et donc : $0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2^n}$.
Il suffit donc de chercher n tel que $\dfrac{1}{2^n} \leqslant 10^{-3}$, c'est à dire $2^n \geqslant 10^3$ ou enfin $n \geqslant \dfrac{3\ln 10}{\ln 2} \simeq 9,97$
Donc $n = 10$ convient, $\sum_{n=0}^{10} \dfrac{1}{2^n+1}$ est une valeur approchée à 10^{-3} prés de $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n+1}$.
Il suffit donc de calculer cette somme.

b/ Série comparable à une intégrale de Riemann

Condition : La convergence absolue se montre en utilisant le critère de Riemann.

Solution : On a pour $n \geqslant \mathrm{N}$, $|u_n| \leqslant \dfrac{\mathrm{K}}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$, et donc,
pour $n \geqslant \mathrm{N}$, $|r_n| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \leqslant \mathrm{K} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$.
Comme $\dfrac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, on obtient : $|r_n| \leqslant \mathrm{K} \displaystyle\int_n^{+\infty} \dfrac{dt}{t^\alpha} = \dfrac{\mathrm{K}}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}}$.
Ceci permet le bon rang en majorant cette quantité par ε. Ce rang sera bien sûr au moins égal à N.

Exemple : On cherche $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+1}$ à 10^{-3} prés.
La convergence de cette série positive est facilement obtenue (par exemple) par comparaison avec une intégrale généralisée. En effet, f définie par $f(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$ est positive, décroissante et d'intégrale convergente à l'infini.
On a $0 \leqslant u_k \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$, donc, $0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \displaystyle\int_n^{+\infty} \dfrac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \displaystyle\int_n^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{n}$.
Il suffit donc de chercher n tel que $\dfrac{1}{n} \leqslant 10^{-2}$, c'est à dire $n \geqslant 100$.
Donc $n = 100$ convient, $\sum_{n=0}^{100} \dfrac{1}{n^2+1}$ est une valeur approchée à 10^{-2} prés de $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+1}$.
Il suffit donc de calculer cette somme.

8. Compléments

8.1. Colbert, lycée numérique

Les logiciels connaissent la somme de nombreuses séries classiques...
Mais aucun logiciel ne permet de donner la somme exacte de toutes les séries !
En mode approché, pour une série convergente, on aura presque toujours un résultat correct.

a/ Maple

C'est le mot-clef « `sum` » qui permet de calculer une somme de série.

`> sum(1/(n**2),n=1..infinity) ;` calcule $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ qui vaut $\frac{\pi^2}{6}$...

b/ HP 40G-40GS

On trouve le symbole $\sum$ sur la touche +, L9C5.

Elle trouve bien $\frac{\pi^2}{6}$ à notre série test de base.

c/ HP 50G

On trouve le symbole $\sum$ sur la touche `SIN`, L5C3.

Elle trouve aussi $\frac{\pi^2}{6}\ldots$

d/ TI 89

La commande `sum` est dans le menu `CALC`, L1C3 à partir de l'écran `HOME`, ou par le menu `MATH`, L8C3, sous-menu `Calculus`.
Devinez ce qu'elle répond à notre série test ?

e/ TI N-inspire CAS

C'est dans la bibliothèque de modèles qu'on trouve le symbole `sum`.

f/ ClassPad 300

8.2. Les mathématiciens du chapitre

Bernoulli Jacob 1654-1705 Mathématicien suisse de la grande famille des Bernoulli. On lui doit des travaux sur les courbes, les coordonnées polaires, le calcul intégral, les séries numériques... C'est lui qui a montré la convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$...

Euler Léonard 1707-1783 L'apport de ce mathématicien suisse est plus que considérable. La définition précise de fonction, l'exponentielle complexe, les équations différentielles linéaires, les courbes paramétrées, les quadriques et, entre autres, de nombreux résultats sur les séries numériques...