

---

# Mathématiques

Résumé de cours – Sup & Spé TSI

---

Christophe Caignaert

Lycée Colbert – 59200 Tourcoing

<http://c.caignaert.free.fr>

Année scolaire 2010 – 2011

## Année Scolaire 2010 – 2011

LES PROGRAMMES de référence sont ceux publiés en 2003 pour la première année et 2004 pour la seconde. Le programme est presque respecté à la lettre.

Ce résumé de cours, ainsi que le cours lui-même, sont disponibles sur mon site personnel :

<http://c.caignaert.free.fr>

Il est composé en LaTeX en utilisant les polices du package *kpfonts*.

Depuis l’an dernier, tous les graphiques, ou presque, ont été refaits, on les espère plus clairs et plus lisibles ! Par ailleurs, on a inséré quelques nouveaux graphiques. . .

Cette version du document est celle du 9 mars 2011.

# Sommaire

<p><b>I Algèbre</b> <span style="float: right;">7</span></p> <p>1. Théorie des ensembles <span style="float: right;">7</span></p> <p style="padding-left: 20px;">1.1. Ensembles <span style="float: right;">7</span></p> <p style="padding-left: 20px;">1.2. Sous-ensembles <span style="float: right;">7</span></p> <p style="padding-left: 20px;">1.3. Loi de composition interne <span style="float: right;">7</span></p> <p style="padding-left: 20px;">1.4. Ensembles finis <span style="float: right;">8</span></p> <p>2. Fonctions et applications <span style="float: right;">8</span></p> <p style="padding-left: 20px;">2.1. Applications <span style="float: right;">8</span></p> <p style="padding-left: 20px;">2.2. Injection, surjection, bijection <span style="float: right;">8</span></p> <p style="padding-left: 20px;">2.3. Image, image réciproque d'une partie <span style="float: right;">8</span></p> <p style="padding-left: 20px;">2.4. Composition des applications <span style="float: right;">9</span></p> <p style="padding-left: 20px;">2.5. Ensemble des applications de E vers F <span style="float: right;">9</span></p> <p>3. Structure de Groupe <span style="float: right;">9</span></p> <p style="padding-left: 20px;">3.1. Groupe <span style="float: right;">9</span></p> <p style="padding-left: 20px;">3.2. Sous-groupe <span style="float: right;">9</span></p> <p style="padding-left: 20px;">3.3. Morphisme de groupe <span style="float: right;">10</span></p> <p>4. Arithmétique de <math>\mathbb{Z}</math> <span style="float: right;">10</span></p> <p style="padding-left: 20px;">4.1. Multiples et diviseurs <span style="float: right;">10</span></p> <p style="padding-left: 20px;">4.2. Division Euclidienne <span style="float: right;">10</span></p> <p style="padding-left: 20px;">4.3. Nombres premiers <span style="float: right;">10</span></p> <p>5. Structure de Corps <span style="float: right;">10</span></p> <p style="padding-left: 20px;">5.1. Corps <span style="float: right;">10</span></p> <p style="padding-left: 20px;">5.2. Corps usuels <span style="float: right;">11</span></p> <p>6. Nombres Réels <span style="float: right;">11</span></p> <p style="padding-left: 20px;">6.1. Inégalités, Bornes <span style="float: right;">11</span></p> <p style="padding-left: 20px;">6.2. Partie entières <span style="float: right;">11</span></p> <p style="padding-left: 20px;">6.3. Formule du Binôme <span style="float: right;">11</span></p> <p>7. Nombres Complexes <span style="float: right;">12</span></p> <p style="padding-left: 20px;">7.1. Nombres Complexes <span style="float: right;">12</span></p> <p style="padding-left: 20px;">7.2. Inégalité triangulaire <span style="float: right;">12</span></p> <p style="padding-left: 20px;">7.3. Groupe des unités <span style="float: right;">12</span></p> <p style="padding-left: 20px;">7.4. Racines d'un nombre complexe <span style="float: right;">12</span></p> <p style="padding-left: 20px;">7.5. Géométrie du plan complexe <span style="float: right;">13</span></p> <p>8. Polynômes <span style="float: right;">14</span></p> <p style="padding-left: 20px;">8.1. Racines <span style="float: right;">14</span></p> <p style="padding-left: 20px;">8.2. Division Euclidienne <span style="float: right;">14</span></p> <p style="padding-left: 20px;">8.3. Fractions Rationnelles <span style="float: right;">15</span></p> <p>9. Espaces Vectoriels <span style="float: right;">15</span></p> <p style="padding-left: 20px;">9.1. Structure d'espace vectoriel <span style="float: right;">15</span></p> <p style="padding-left: 20px;">9.2. Sous-espace vectoriel <span style="float: right;">15</span></p> <p style="padding-left: 20px;">9.3. Somme de sous-espaces vectoriels <span style="float: right;">15</span></p> <p style="padding-left: 20px;">9.4. Norme sur <math>\mathbb{R}^m</math> <span style="float: right;">16</span></p> <p style="padding-left: 20px;">9.5. Esp. vect. de dim. finie : base <span style="float: right;">16</span></p> <p style="padding-left: 20px;">9.6. Rang d'une famille (finie) de vecteurs <span style="float: right;">17</span></p> <p style="padding-left: 20px;">9.7. Espaces vectoriels usuels <span style="float: right;">17</span></p> <p>10. Applications Linéaires <span style="float: right;">17</span></p> <p style="padding-left: 20px;">10.1. Applications linéaires <span style="float: right;">17</span></p> <p style="padding-left: 20px;">10.2. s-e-v stable par <math>f</math> <span style="float: right;">18</span></p> <p style="padding-left: 20px;">10.3. Image et noyau <span style="float: right;">18</span></p> <p style="padding-left: 20px;">10.4. Projecteur <span style="float: right;">18</span></p> <p style="padding-left: 20px;">10.5. Symétries <span style="float: right;">18</span></p> <p style="padding-left: 20px;">10.6. Théorème du rang <span style="float: right;">19</span></p> <p style="padding-left: 20px;">10.7. Système linéaire <span style="float: right;">19</span></p>	<p>11. Matrices <span style="float: right;">19</span></p> <p style="padding-left: 20px;">11.1. Généralités <span style="float: right;">19</span></p> <p style="padding-left: 20px;">11.2. Rang d'une matrice <span style="float: right;">20</span></p> <p style="padding-left: 20px;">11.3. Généralités sur les matrices carrées <span style="float: right;">20</span></p> <p style="padding-left: 20px;">11.4. Matrice d'une application linéaire <span style="float: right;">21</span></p> <p style="padding-left: 20px;">11.5. Matrice de Passage <span style="float: right;">21</span></p> <p style="padding-left: 20px;">11.6. Changements de base <span style="float: right;">22</span></p> <p style="padding-left: 20px;">11.7. Trace d'une matrice <span style="float: right;">22</span></p> <p>12. Déterminants <span style="float: right;">22</span></p> <p style="padding-left: 20px;">12.1. Ordre 2 et 3 <span style="float: right;">22</span></p> <p style="padding-left: 20px;">12.2. Matrice triangulaire <span style="float: right;">22</span></p> <p style="padding-left: 20px;">12.3. Ordre quelconque <span style="float: right;">22</span></p> <p style="padding-left: 20px;">12.4. Déterminant d'un produit <span style="float: right;">23</span></p> <p style="padding-left: 20px;">12.5. Dét. d'une mat. triangulaire par blocs <span style="float: right;">23</span></p> <p>13. Réduction des Endomorphismes <span style="float: right;">23</span></p> <p style="padding-left: 20px;">13.1. Valeurs propres et vecteurs propres <span style="float: right;">23</span></p> <p style="padding-left: 20px;">13.2. Polynôme caractéristique <span style="float: right;">23</span></p> <p style="padding-left: 20px;">13.3. Diagonalisibilité <span style="float: right;">24</span></p> <p style="padding-left: 20px;">13.4. Diagonalisibilité et diagonalisation <span style="float: right;">24</span></p> <p style="padding-left: 20px;">13.5. Triangularisation (ou trigonalisation) <span style="float: right;">24</span></p> <p style="padding-left: 20px;">13.6. Puissances d'une matrice <span style="float: right;">24</span></p> <p>14. Espaces Préhilbertiens Réels et Euclidiens <span style="float: right;">24</span></p> <p style="padding-left: 20px;">14.1. Produit scalaire <span style="float: right;">24</span></p> <p style="padding-left: 20px;">14.2. Esp. vect. préhilbertiens et euclidiens <span style="float: right;">25</span></p> <p style="padding-left: 20px;">14.3. Inégalités <span style="float: right;">26</span></p> <p style="padding-left: 20px;">14.4. Endomorphismes symétriques <span style="float: right;">26</span></p> <p style="padding-left: 20px;">14.5. Matrice symétrique réelle <span style="float: right;">26</span></p> <p style="padding-left: 20px;">14.6. Procédé de Schmidt <span style="float: right;">26</span></p> <p style="padding-left: 20px;">14.7. Projection sur un s-e-v de dim. finie <span style="float: right;">26</span></p> <p style="padding-left: 20px;">14.8. Méthode des Moindres Carrés <span style="float: right;">27</span></p> <p>15. Groupe Linéaire et Groupe Orthogonal <span style="float: right;">29</span></p> <p style="padding-left: 20px;">15.1. Groupe linéaire <span style="float: right;">29</span></p> <p style="padding-left: 20px;">15.2. Groupe orthogonal <span style="float: right;">29</span></p> <p><b>II Analyse</b> <span style="float: right;">30</span></p> <p>16. Suites <span style="float: right;">30</span></p> <p style="padding-left: 20px;">16.1. Suites <span style="float: right;">30</span></p> <p style="padding-left: 20px;">16.2. Sous-suites <span style="float: right;">30</span></p> <p style="padding-left: 20px;">16.3. Suites vectorielles <span style="float: right;">30</span></p> <p style="padding-left: 20px;">16.4. Suites réelles ou complexes <span style="float: right;">30</span></p> <p style="padding-left: 20px;">16.5. Suites réelles <span style="float: right;">31</span></p> <p style="padding-left: 20px;">16.6. Suites récurrentes <span style="float: right;">31</span></p> <p style="padding-left: 20px;">16.7. Suites récurrentes linéaires <span style="float: right;">31</span></p> <p>17. Fonctions <math>\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}</math> <span style="float: right;">31</span></p> <p style="padding-left: 20px;">17.1. Ensemble de définition <span style="float: right;">31</span></p> <p style="padding-left: 20px;">17.2. Monotonie <span style="float: right;">31</span></p> <p style="padding-left: 20px;">17.3. Limite et continuité <span style="float: right;">32</span></p> <p style="padding-left: 20px;">17.4. Continuité sur un intervalle <span style="float: right;">32</span></p> <p style="padding-left: 20px;">17.5. Fn en escalier, continue par morceaux <span style="float: right;">33</span></p> <p style="padding-left: 20px;">17.6. Limites usuelles <span style="float: right;">33</span></p> <p style="padding-left: 20px;">17.7. Equivalents <span style="float: right;">33</span></p> <p style="padding-left: 20px;">17.8. Négligeabilité <span style="float: right;">33</span></p> <p>18. Dérivabilité <span style="float: right;">34</span></p> <p style="padding-left: 20px;">18.1. Dérivée, classe <math>\mathcal{C}^1</math> et notations <span style="float: right;">34</span></p> <p style="padding-left: 20px;">18.2. Classe <math>\mathcal{C}^n</math> <span style="float: right;">34</span></p> <p style="padding-left: 20px;">18.3. Application de classe <math>\mathcal{C}^k</math> par morceaux <span style="float: right;">34</span></p> <p style="padding-left: 20px;">18.4. Somme et produit <span style="float: right;">34</span></p> <p style="padding-left: 20px;">18.5. Dérivée d'une fonction composée <span style="float: right;">35</span></p> <p style="padding-left: 20px;">18.6. Dérivée et prolongement par continuité <span style="float: right;">35</span></p> <p style="padding-left: 20px;">18.7. Th. de Rolle, T.A.F., Formules de Taylor <span style="float: right;">35</span></p>
--	---

18.8. Zéros d'une fonction . . . . .	36	26.3. Somme de deux séries entières . . . . .	66
18.9. Développements limités . . . . .	37	26.4. Développement en série entière . . . . .	66
18.10. Opérations sur les $dl_n$ . . . . .	37	26.5. Séries entières usuelles . . . . .	66
19. Fonctions usuelles . . . . .	38	26.6. Sér. ent. solution d'une équation diff. . . . .	67
19.1. Exponentielle et Logarithme . . . . .	38	27. Séries de Fourier . . . . .	67
19.2. Fonctions trigonométriques circulaires . . . . .	38	27.1. Coefficients de Fourier . . . . .	67
19.3. Fonc. trigonométriques réciproques . . . . .	39	27.2. Cas où $f$ est $2\pi$ -périodique . . . . .	68
19.4. Fonc. trigonométriques hyperboliques . . . . .	41	27.3. Convergence . . . . .	68
19.5. Fonc. trig. hyperboliques réciproques . . . . .	42	27.4. Produit scalaire et formule de Parseval . . . . .	70
19.6. Autres fonctions usuelles . . . . .	44	28. $\int \sum = \sum \int \dots$ . . . . .	70
20. Trigonométrie . . . . .	46	28.1. Série entière . . . . .	71
20.1. Propriétés élémentaires . . . . .	46	28.2. Autres cas . . . . .	71
20.2. Symétries . . . . .	46	29. Fonctions $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	71
20.3. Arc double . . . . .	47	29.1. Limite et continuité . . . . .	71
20.4. Sommes d'arcs . . . . .	47	29.2. Classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$ . . . . .	72
20.5. Transformation de produits en sommes . . . . .	47	29.3. Extremums d'une fonction $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	72
20.6. Transformation de sommes en produits . . . . .	47	30. Fonctions (ou suites) à valeur dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ . . . . .	73
20.7. Formule de Moivre . . . . .	47	30.1. Limite et continuité . . . . .	73
20.8. Fonctions réciproques . . . . .	47	30.2. Fonction $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , classe $\mathcal{C}^1$ . . . . .	73
20.9. Pour le calcul intégral . . . . .	47	30.3. Fonction $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , classe $\mathcal{C}^1$ . . . . .	73
21. Recherche de primitives . . . . .	48	31. Equations et systèmes différentiels . . . . .	73
21.1. Fraction rationnelle en $x$ . . . . .	48	31.1. Généralités . . . . .	73
21.2. Fractions rationnelles diverses . . . . .	48	31.2. Non Linéaire du premier ordre . . . . .	74
21.3. Polynôme $\times$ exponentielle . . . . .	48	31.3. Linéaire du premier ordre . . . . .	74
21.4. Primitives usuelles . . . . .	48	31.4. Lin. du sec. ordre à coeff. constants . . . . .	75
22. Intégrale de Riemann . . . . .	49	31.5. Linéaire du second ordre . . . . .	75
22.1. Primitive . . . . .	49	31.6. Équation aux dérivées partielles . . . . .	75
22.2. Interprétation géométrique . . . . .	49	31.7. Système Linéaire du premier ordre . . . . .	76
22.3. Inégalités . . . . .	51	31.8. Système autonome . . . . .	76
22.4. Théorème des 3 conditions . . . . .	51	III Géométrie . . . . .	78
22.5. Intégrale dépendant d'une borne . . . . .	52	32. Systèmes de coordonnées . . . . .	78
22.6. Continuité et dérivation sous $\int \dots$ . . . . .	52	32.1. Coordonnées polaires . . . . .	78
22.7. Int. par parties et chang. de variable . . . . .	52	32.2. Coordonnées cylindriques . . . . .	78
22.8. Sommes de Riemann . . . . .	52	32.3. Coordonnées sphériques . . . . .	79
23. Intégrale généralisée . . . . .	53	32.4. Coordonnées sphériques des physiciens . . . . .	79
23.1. Convergence . . . . .	53	33. Vecteurs du plan et de l'espace . . . . .	80
23.2. Fonctions positives . . . . .	54	33.1. Produit scalaire . . . . .	80
23.3. Théorème des 3 conditions . . . . .	55	33.2. Produit vectoriel . . . . .	80
23.4. Int. par parties et chang. de variable . . . . .	55	33.3. Déterminants . . . . .	81
23.5. Un procédé de convergence . . . . .	55	34. Droites et Plans affines . . . . .	81
23.6. Continuité et dérivation sous $\int \dots$ . . . . .	56	34.1. Droites du plan . . . . .	81
23.7. Ensemble de définition . . . . .	56	34.2. Plans de l'espace affine . . . . .	82
24. Intégrales doubles et triples . . . . .	57	34.3. Droites de l'espace affine . . . . .	83
24.1. Description hiérarchisée du domaine . . . . .	57	34.4. Angles . . . . .	83
24.2. Calcul d'Aires et de Volumes . . . . .	58	34.5. Aires et Volumes élémentaires . . . . .	83
24.3. Inclusion des domaines . . . . .	58	34.6. Distances . . . . .	84
24.4. Changement de variables . . . . .	58	35. Projecteurs et Symétries . . . . .	84
25. Séries numériques (réelles ou complexes) . . . . .	61	35.1. Projecteur . . . . .	84
25.1. Convergence . . . . .	61	35.2. Symétrie . . . . .	84
25.2. Convergence Absolue . . . . .	62	36. Isométries . . . . .	85
25.3. Séries géométriques . . . . .	62	36.1. Isométries vectorielles et affines . . . . .	85
25.4. Séries positives . . . . .	63	36.2. Symétries orthogonales . . . . .	85
25.5. Critère spécial des séries alternées . . . . .	63	36.3. Recherche d'une symétrie orthogonale . . . . .	85
25.6. Comparaison série-intégrale . . . . .	64	36.4. Isométries Vectorielles . . . . .	86
25.7. Suite et série des différences . . . . .	64	36.5. Isométries Affines . . . . .	86
25.8. Calcul exact de sommes de séries . . . . .	64		
25.9. Calcul approché de sommes de séries . . . . .	65		
26. Séries Entières . . . . .	65		
26.1. Rayon de convergence . . . . .	65		
26.2. Convergence . . . . .	65		

37. Similitudes directes	87	44. Bases	110
37.1. Similitude directe	87	44.1. Manipulations de base	110
37.2. Identification	87	44.2. Constantes	111
38. Courbes Planes	87	44.3. Sommes et produits	111
38.1. Courbes d'équation $y = f(x)$	87	44.4. Fonctions d'évaluation	111
38.2. Courbes planes en paramétriques	88	44.5. Transformation générale d'expressions	111
38.3. Courbes planes en polaires	91	44.6. Simplification d'expressions	112
38.4. Courbes usuelles en polaires	93	44.7. Structures de données	112
39. Surfaces : Généralités	93	45. Mathématiques usuelles	112
39.1. Surfaces, plan tangent	93	45.1. Fonctions mathématiques usuelles	112
39.2. Tangente à une courbe de l'espace	94	45.2. Limites et développements limités	113
40. Cercles et Sphères	95	45.3. Dérivées	113
40.1. Cercles dans le plan et sphères	95	45.4. Primitives et intégrales	113
40.2. Cocyclicité	95	45.5. Solve...	113
40.3. Cercles dans l'espace.	95	46. Algèbre linéaire	114
41. Coniques	95	46.1. Vecteurs	114
41.1. Ellipses	96	46.2. Procédé de Schmidt	114
41.2. Paraboles	97	46.3. Matrices	114
41.3. Hyperboles	97	46.4. Éléments propres	114
41.4. Identification d'une conique	99	47. Graphiques	115
41.5. Projection d'une conique sur un plan	99	47.1. Courbes du plan	115
42. Quadriques	99	47.2. Surfaces	115
42.1. Équations réduites	99	47.3. Courbes de l'espace	115
42.2. Quadriques dégénérées	101	47.4. Tracé simultané	115
42.3. Identification géométrique	101	48. Structures de contrôle et procédures	116
42.4. Identification d'une quadrique	102	48.1. Structure alternative	116
42.5. Classification selon les valeurs propres	103	48.2. Structure répétitive	116
43. Surfaces de révolution, cylindres et cônes	103	48.3. Procédures	117
43.1. Surfaces de révolution	103	49. Exemples de Programmes	117
43.2. Cylindres	104	49.1. Un programme très simple	117
43.3. Cônes	106	49.2. Structure alternative	117
43.4. Cylindres et cônes de révolution	108	49.3. Structure itérative « pour »	118
		49.4. Structure itérative « tant que »	118
IV Maple	110	49.5. Récurrence sur plusieurs rangs	118
		49.6. Un exemple en algèbre linéaire	119

---

## Figures

1	Procédé de Schmidt . . . . .	27	26	Critère spécial des séries alternées . . . . .	64
2	Projection orthogonale . . . . .	27	27	Comparaison série-intégrale . . . . .	64
3	Méthode des Moindres Carrés . . . . .	28	28	Convergence d'une série entière . . . . .	66
4	App. de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux . . . . .	35	29	Coordonnées Polaires . . . . .	78
5	Théorème de Newton-Raphson . . . . .	37	30	Coordonnées Cylindriques . . . . .	79
6	Fonctions Exponentielle et Logarithme . . . . .	39	31	Coordonnées Sphériques . . . . .	80
7	Fonctions Sinus et Cosinus . . . . .	39	32	Coordonnées Sphériques des physiciens . . . . .	81
8	Fonction Tangente . . . . .	40	33	Fonction convexe . . . . .	89
9	Fonctions Arcsinus et Arccosinus . . . . .	41	34	Etude locale d'une courbe paramétrée . . . . .	90
10	Fonction Arctangente . . . . .	41	35	Exemple de $\rho$ négatif en polaires . . . . .	92
11	Fonctions Cosinus et Sinus Hyperboliques . . . . .	42	36	Tangente en polaires . . . . .	92
12	Fonction Tangente Hyperbolique . . . . .	43	37	Tangente en polaires, $\rho$ négatif . . . . .	92
13	Fonctions Argch et Argsh . . . . .	43	38	Plan tangent . . . . .	94
14	Fonction Argument Tangente Hyperbolique . . . . .	44	39	Ellipse : éléments géométriques . . . . .	96
15	Cercle Trigonométrique . . . . .	46	40	Parabole : éléments géométriques . . . . .	97
16	Intégrale d'une fonction positive . . . . .	49	41	Hyperbole : éléments géométriques . . . . .	98
17	Intégrale d'une fonction de signe variable . . . . .	51	42	Ellipsoïde . . . . .	100
18	Intégrale généralisée en un point fini . . . . .	53	43	Paraboloïdes Elliptiques et Hyperboliques . . . . .	100
19	Intégrale généralisée à l'infini . . . . .	54	44	Hyperboloïdes à 1 et 2 nappes . . . . .	101
20	Intégrale double . . . . .	57	45	Surface de révolution . . . . .	104
21	Théorème de Fubini . . . . .	58	46	Exemples de cylindres . . . . .	105
22	Intégrale triple . . . . .	59	47	Cylindre : direction et directrice . . . . .	105
23	Intégrale double en polaires . . . . .	60	48	Contour apparent dans une direction . . . . .	106
24	Intégrale triple en cylindriques . . . . .	61	49	Exemples de cônes . . . . .	107
25	Intégrale triple en sphériques . . . . .	62	50	Cône : sommet et directrice . . . . .	107
			51	Contour apparent depuis un point . . . . .	108

---

## Tableaux

1	Fonctions usuelles . . . . .	45	2	Primitives usuelles . . . . .	50
			3	Séries Entières usuelles . . . . .	67
			4	Coefficients de Fourier . . . . .	69

---

# Algèbre

## 1. Théorie des ensembles

### 1.1. Ensembles

Un ensemble peut se définir par

- la liste de ses éléments, comme par exemple :  $E = \{1, 2, \dots, n\}$ ;
- la propriété que vérifient ses éléments, par ex. :  $E = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 1 = 0\}$ .

Quand  $x$  est un élément de  $E$ , c'est à dire qu'il est dans la liste des éléments de  $E$ , ou qu'il vérifie la propriété caractéristique de  $E$ , on dit que  $x$  **appartient** à  $E$ , noté :  $x \in E$ .

**Définition** : Si  $E$  et  $F$  sont deux ensembles, on appelle l'**ensemble produit** de  $E$  et  $F$ , noté  $E \times F$ , l'ensemble des couples d'un élément de  $E$  et d'un élément de  $F$ , soit :  $E \times F = \{(x, y) / x \in E, y \in F\}$

L'ensemble vide se note :  $\emptyset$ .

### 1.2. Sous-ensembles

On dit que  $F$  est **inclus** dans  $E$ , noté  $F \subset E$ ,  $F \subset E \Leftrightarrow \forall x \in F, x \in E$ .

$F$  est ainsi un sous-ensemble de  $E$ , ou une partie de  $E$ .

On note  $\mathcal{P}(E)$ , l'ensemble des parties de  $E$ . C'est l'ensemble de tous les sous-ensembles de  $E$ .

**Définition** : L'**intersection** de 2 ensembles  $A$  et  $B$ , notée  $A \cap B$  est :  $A \cap B = \{x / x \in A \text{ et } x \in B\}$

**Définition** : La **réunion** de 2 ensembles  $A$  et  $B$ , notée  $A \cup B$  est :  $A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$

**Définition** : Si  $A \subset B$ , le **complémentaire** de  $A$  dans  $B$  est :  $\complement_B A = \{x / x \in B \text{ et } x \notin A\}$ .

### 1.3. Loi de composition interne

**Définition** : Si  $E$  est un ensemble, une **loi de composition interne**, notée  $*$ , sur  $E$  est une application (voir page 8) définie sur  $E \times E$  et à valeur dans  $E$ .

A deux éléments de  $E$ , on associe un troisième élément de  $E$ .

On note une loi de composition interne sous forme d'opération plutôt que sous forme d'application :  $z = x * y$ .

Les propriétés usuelles d'une loi  $*$  de composition interne sur  $E$  sont :

**associativité** :  $\forall x, y, z \in E, (x * y) * z = x * (y * z)$

En un mot, on peut, dans un calcul, regrouper les termes comme on veut, sans changer leur ordre.

Il est pratiquement impossible de travailler avec une loi qui n'est pas associative.

**commutativité** :  $\forall x, y \in E, x * y = y * x$

Pour une loi commutative, dans un calcul, on peut changer l'ordre des termes.

**élément neutre** :  $e$  est élément neutre  $\Leftrightarrow \forall x \in E, x * e = e * x = x$

C'est par exemple 0 pour l'addition et 1 pour la multiplication.

**élément inversible** :  $x$  est inversible, ou possède un symétrique  $\Leftrightarrow \exists x' \in E$  tel que :  $x * x' = x' * x = e$

Ceci n'a bien sûr de sens que si la loi  $*$  possède déjà un élément neutre  $e$ .

## 1.4. Ensembles finis

**Définition :** Un ensemble est **fini**

- s'il est vide ou
- s'il peut se mettre en bijection (voir ci-dessous) avec  $\{1, 2, \dots, n\}$ .  
Son **cardinal**, qui est son nombre d'éléments, est alors  $n$ .  
Le **cardinal** de l'ensemble vide est 0.

**Notation :** L'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  se note aussi  $[[1, n]]$ .

**Théorème :**

- $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$
- Le cardinal de l'ensemble des parties de  $E$  est :  $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}$
- Le cardinal de l'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$  (voir page suivante) est :

$$\text{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}$$

- Le cardinal de l'ensemble des parties à  $p$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments est :  $\binom{n}{k}$

## 2. Fonctions et applications

### 2.1. Applications

**Définition :** Une **fonction**  $f$  de  $E$  vers – ou dans –  $F$  est une relation telle que :

$$\forall x \in E, \text{ il existe au plus un seul } y \in F, \text{ tel que : } y = f(x).$$

Une **application**  $f$  de  $E$  vers – ou dans –  $F$  est une relation telle que :

$$\forall x \in E, \text{ il existe un et un seul } y \in F, \text{ tel que : } y = f(x).$$

**Définition :** Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$ , et  $A$  une partie de  $E$ ,

alors :  $f_A : A \rightarrow F$ , définie par :  $\forall x \in A, f_A(x) = f(x)$  est la **restriction** de  $f$  à  $A$ .

**Définition :** Soit  $g$  une application de  $A$  vers  $F$ , et  $A$  une partie de  $E$ ,

alors, toute application :  $f : E \rightarrow F$ , telle que :  $\forall x \in A, f(x) = g(x)$  est un **prolongement** de  $g$  sur  $E$ .

### 2.2. Injection, surjection, bijection

**Définition :** Une application est **injective** si et seulement si deux éléments distincts ont des images distinctes.

En pratique, on montre que :  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ .

**Définition :** Une application est **surjective** si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède un antécédent, c'est à dire :  $\forall y \in F, \exists x \in E$  tel que  $f(x) = y$ .

**Définition :** Une application est **bijective** si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède un unique antécédent, c'est à dire :  $\forall y \in F, \text{ il existe un et un seul } x \in E$  tel que  $f(x) = y$ .

**Définition :** Si  $f$  est une bijection de  $E$  sur  $F$ , alors :  $z = f^{-1}(t) \Leftrightarrow f(z) = t$ , définit bien une application  $f^{-1}$ , de  $F$  sur  $E$ , bijective, appelée **application réciproque** de  $f$ .

### 2.3. Image, image réciproque d'une partie

**Définition :** Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$ ,

- si  $A$  est une partie de  $E$ , on appelle **image** – ou image directe – de  $A$  par  $f$ , notée  $f(A) = \{y \in F, \exists x \in A \text{ tel que : } y = f(x)\}$ .  
C'est l'ensemble des images des éléments de  $A$ ;
- si  $B$  est une partie de  $F$ , on appelle **image réciproque** de  $B$  par  $f$ , notée  $f^{-1}(B) = \{x \in E, \text{ tels que : } f(x) \in B\}$ .  
C'est l'ensemble des éléments de  $E$  dont l'image est dans  $B$ .

On peut parler de l'image réciproque d'une partie B, notée  $f^{-1}(B)$  même quand l'application  $f^{-1}$  n'existe pas...

Dans les problèmes, on note le plus souvent  $f(A)$  et  $f^{-1}(B)$  les images et images réciproques d'une partie. On a ici changé la notation afin de ne pas confondre avec l'image  $f(x)$  d'un élément  $x$  de E et avec l'image réciproque  $f^{-1}(y)$  d'un élément  $y$  de F quand  $f$  est bijective.

## 2.4. Composition des applications

**Définition :** Soit :  $f : E \rightarrow F$  et :  $g : F \rightarrow G$ , on définit la **composée** de  $f$  et  $g$ , comme étant l'application :

$$g \circ f : E \rightarrow G, \text{ telle que : } g \circ f(x) = g(f(x)).$$

En général :  $g \circ f \neq f \circ g \dots$  même quand tous les deux sont définis !

**Théorème :** On prend :  $f : E \rightarrow F$  et :  $g : F \rightarrow G$ , alors :

- si  $f$  et  $g$  sont surjectives,  $g \circ f$  est surjective.
- si  $f$  et  $g$  sont injectives,  $g \circ f$  est injective.
- si  $f$  et  $g$  sont bijectives,  $g \circ f$  est bijective.

**Théorème :** La composition des applications est toujours associative. C'est à dire :

Si on a :  $f : E \rightarrow F$ ,  $g : F \rightarrow G$ , et :  $h : G \rightarrow H$ ,  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .

L'application « identité » :  $Id_E : E \rightarrow E$ , qui à  $x$  associe  $x$  est une bijection, et est élément neutre pour la composition des applications.

**Théorème :** Si  $f$  est une bijection de E dans F, on a bien sûr :  $f^{-1} \circ f = Id_E$ , l'identité de E ;  
et on a aussi :  $f \circ f^{-1} = Id_F$ .

## 2.5. Ensemble des applications de E vers F

**Définition :** L'ensemble des applications de E vers F est noté :  $\mathcal{F}(E, F)$ .

Si E et F sont des ensembles finis, alors,  $\mathcal{F}(E, F)$  est aussi fini.

# 3. Structure de Groupe

## 3.1. Groupe

**Définition :** \* étant une loi de composition interne, c'est à dire :  $\forall a, b \in G, a * b \in G$

$$(G, *) \text{ est un groupe} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a, b, c \in G, & (a * b) * c = a * (b * c) \\ \exists e \in G, \forall a \in G, & a * e = e * a = a \\ \forall a \in G, \exists a' \in G, & a * a' = a' * a = e \end{cases}$$

Il s'agit de l'associativité, de l'existence d'un élément neutre, et de l'existence d'un symétrique pour tout élément.

Si, de plus la loi est commutative, le groupe est dit abélien ou commutatif.

Remarquons qu'un groupe est non vide... puisqu'il contient l'élément neutre.

## 3.2. Sous-groupe

**Théorème :**  $H \subset G$  est un **sous-groupe** de  $(G, *) \Leftrightarrow \begin{cases} H \text{ est non vide} \\ \forall a, b \in H, a * b' \in H \end{cases}$

En pratique, il est bien plus facile de montrer qu'on a un sous-groupe d'un groupe connu plutôt qu'un groupe.

### 3.3. Morphisme de groupe

**Définition :**  $f : (F, *) \rightarrow (G, \circ)$  est un **morphisme de groupe**  $\Leftrightarrow \forall a, b \in F, f(a * b) = f(a) \circ f(b)$

## 4. Arithmétique de $\mathbb{Z}$

### 4.1. Multiples et diviseurs

**Définition :** Soient  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{Z}$ , tels qu'il existe  $q \in \mathbb{Z}$  tel que :  $a = bq$ .

On dit alors que  $a$  est un **multiple** de  $b$ , ou que  $a$  est **divisible** par  $b$ .

On dit aussi que  $b$  est un **diviseur** de  $a$ .

### 4.2. Division Euclidienne

**Théorème :** Soient  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{N}^*$ , alors, il existe un **unique** couple  $(q, r)$  avec  $q \in \mathbb{Z}$  et  $r \in \{0, 1, \dots, b-1\}$  tel que :  $a = bq + r$ .

Si  $a \in \mathbb{N}$ , il s'agit simplement de la division de l'école primaire !

Mais, si  $a < 0$ , et d'ailleurs dans tous les cas,  $q$  est la partie entière (voir page ci-contre) de  $\frac{a}{b}$ .

On peut toujours faire la division euclidienne de  $a$  par  $b \neq 0$ , mais, il n'y a que quand le reste est nul que  $a$  est divisible par  $b$  !

### 4.3. Nombres premiers

**Définition :** Un **nombre premier**  $a$  de  $\mathbb{N}^*$  est un entier  $a$  qui n'est divisible, dans  $\mathbb{N}$ , que par lui-même et par 1.

Un **nombre premier**  $a$  de  $\mathbb{Z}^*$  est un nombre tel que  $|a|$  est un nombre premier de  $\mathbb{N}^*$ .

**Théorème :** Tout entier  $a$  de  $\mathbb{N}^*$  est décomposable **de façon unique** en produit de nombres premiers de  $\mathbb{N}^*$ .

Tout entier  $a$  de  $\mathbb{Z}^*$  est décomposable **de façon unique** en produit de nombres premiers de  $\mathbb{N}^*$  et du signe de  $a$ .

**Exemple :**  $-360 = -1 \times 2^3 \times 3^2 \times 5$

La décomposition en produit de nombres premiers permet d'effectuer facilement :

- les simplifications de fractions ;
- la somme de deux fractions, on prend alors comme nouveau dénominateur le nombre obtenu en prenant dans chacun des dénominateurs chaque facteur premier avec l'exposant le plus grand.

## 5. Structure de Corps

### 5.1. Corps

**Définition :** Un **corps**  $\mathbb{K}$  est un ensemble muni de deux lois de composition interne,  $+$  et  $\cdot$ , telles que :

- $(\mathbb{K}, +)$  est un groupe commutatif ;
- $(\mathbb{K}^*, \cdot)$  est un groupe ;
- $\forall x, y, z \in \mathbb{K}, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ , c'est à dire que la loi  $\cdot$  est distributive par rapport à la loi  $+$ .

## 5.2. Corps usuels

Les corps usuels sont  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  notés  $\mathbb{K}$  quand c'est l'un ou l'autre. On ne travaille que plus exceptionnellement dans  $\mathbb{Q}$ .

# 6. Nombres Réels

## 6.1. Inégalités, Bornes

On rappelle l'inégalité triangulaire :  $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$ .

**Définition :** Soit  $A$  une partie, non vide, de  $\mathbb{R}$  majorée,  
la **borne supérieure** de  $A$  est le plus petit des majorants de  $A$ .  
Si  $A$  est une partie, non vide, de  $\mathbb{R}$  minorée,  
la **borne inférieure** de  $A$  est le plus grand des minorants de  $A$ .

**Théorème :** Toute partie non vide majorée de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure, et toute partie non vide minorée de  $\mathbb{R}$  admet une borne inférieure.

**Notation :** On note :  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$

Cela ne rend pas  $-\infty$  et  $+\infty$  réels !

**Théorème :** Tout intervalle réel non vide et non réduit à un point contient une infinité de nombres rationnels et une infinité de nombres irrationnels.

## 6.2. Partie entières

**Définition :** La partie entière d'un nombre réel est le plus grand des entiers qui lui sont plus petits.

Ainsi :  $\text{Ent}(\pi) = 3$  mais :  $\text{Ent}(-\pi) = -4$ .

On a :

$$\text{Ent}(x) \leq x < \text{Ent}(x) + 1 \quad \text{et} \quad x - 1 < \text{Ent}(x) \leq x$$

**Définition :** La valeur décimale approchée à  $10^{-n}$  près par défaut de  $x$  est :  $\frac{\text{Ent}(x \times 10^n)}{10^n}$ .

La valeur décimale approchée à  $10^{-5}$  près par défaut de  $\pi$  est : 3,14159.

## 6.3. Formule du Binôme

a/ Coefficients binomiaux

**Définition :**  $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

**Théorème :**  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$   
 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$  est la formule du triangle de Pascal  
 $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$      $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$      $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$   
 $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

On trouve encore parfois la notation  $C_n^k$  qui a été remplacée par la notation :  $\binom{n}{k}$ .

Remarquons l'inversion de  $n$  et  $k$ .

b/ Formule du Binôme et autres

**Théorème :**  $\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

**Théorème :**  $\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, a^n - b^n = (a - b) \left( \sum_{k=1}^n a^{n-k} b^{k-1} \right)$

Les deux formules précédentes sont en fait valables dès qu'on a deux lois + et  $\cdot$  qui sont (entre autres) commutatives, la deuxième étant distributive par rapport à la première.

Quand on n'a pas la commutativité générale du produit, il faut et il suffit que le produit des deux éléments concernés commute.

Ce sera le cas avec les matrices carrées  $M_n(\mathbb{K})$ , voir page 24, et avec l'ensemble des endomorphismes de  $E$ , c'est à dire  $\mathcal{L}(E)$ .

**Théorème :**  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

## 7. Nombres Complexes

### 7.1. Nombres Complexes

- $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$ ,  $\rho \geq 0$  est le **module** de  $z$ ,  $\theta$  son **argument** ;
- $\bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$ , est le **conjugué** de  $z$  ;
- $\rho = |z| = |-z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\tan \theta = \frac{y}{x}$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \quad \overline{z z'} = \bar{z} \bar{z}' \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \quad |z|^2 = z \bar{z}$

### 7.2. Inégalité triangulaire

**Théorème :**  $\forall x, y \in \mathbb{C}, \quad \left| |x| - |y| \right| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$

Cette inégalité est, bien sûr, encore valable lorsque  $x$  et  $y$  sont réels...

### 7.3. Groupe des unités

**Théorème :** L'ensemble  $\mathbb{U}$  des nombres complexes de module 1, muni de la multiplication, a une structure de groupe commutatif.

Les relations d'Euler sont :

- $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , et donc :  $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$  et  $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ .

La formule de Moivre est :

- $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

### 7.4. Racines d'un nombre complexe

a/ Racines carrées

**Théorème :**  $z^2 = a + ib$  avec  $z = x + iy \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \text{signe}(xy) = \text{signe}(b) \end{cases}$

Cette technique est la technique utilisée en pratique pour trouver les racines carrées de  $a + ib$  lorsque la moitié de l'argument n'est pas un angle usuel.

b/ Racines  $n^{\text{èmes}}$  de l'unité

**Théorème :**  $z^n = 1 \Leftrightarrow z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$  avec  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

c/ Racines  $n^{\text{èmes}}$  d'un nombre complexe

**Théorème :**  $z^n = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{i\theta + 2ik\pi}{n}}$  avec  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

En pratique, on retiendra et utilisera le fait que les racines  $n^{\text{èmes}}$  d'un complexe s'obtiennent en effectuant le produit de l'une d'entre elles par les racines  $n^{\text{èmes}}$  de l'unité.

d/ Exponentielle complexe

En fait,  $\forall z \in \mathbb{C}$ , on peut définir :  $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ .

On a toujours :  $\forall z, z' \in \mathbb{C}, e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ .

## 7.5. Géométrie du plan complexe

a/ Similitudes directes

- $z \mapsto az$

Si le point M est d'affixe  $z$ , on trouve le point M' d'affixe  $az$  en effectuant la rotation de centre O, d'angle  $\arg a$  et l'homothétie de centre O et de rapport  $|a|$ .

- $z \mapsto az + b$

Si le point M est d'affixe  $z$ , on trouve le point M' d'affixe  $az + b$

- en effectuant la rotation de centre O, d'angle  $\arg a$  et l'homothétie de centre O et de rapport  $|a|$ .

O est le point fixe, d'affixe vérifiant :  $z = az + b$ , dans le cas où  $a \neq 1$  ;

- dans le cas où  $a = 1$ , le point M' est le translaté de M de vecteur d'affixe  $b$ .

On peut aussi se reporter à la page 87.

b/ Autre transformations

- $z \mapsto \frac{1}{z}$

Si le point M est d'affixe  $z$ , le point M' d'affixe  $\frac{1}{z}$  se trouve sur la droite, orientée, symétrique de (OM) par rapport à Ox, la norme de  $\overrightarrow{OM'}$  étant l'inverse de celle de  $\overrightarrow{OM}$ .

- $z \mapsto \bar{z}$

Si le point M est d'affixe  $z$ , le point M' d'affixe  $\bar{z}$  est le symétrique de M par rapport à l'axe Ox.

c/ Cercles et droites

**Théorème :** A, B, M d'affixes respectives  $a, b, z$ , alors :

- le module de  $\frac{z-a}{z-b}$  est :  $\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = \frac{\|\overrightarrow{AM}\|}{\|\overrightarrow{BM}\|}$  ;

Quand ce module est constant, on obtient un cercle ou une droite.

- l'argument de  $\frac{z-a}{z-b}$  est :  $\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \widehat{(AM, BM)}$

## 8. Polynômes

### 8.1. Racines

Soit le polynôme :  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

**Théorème :** (d'Alembert-Gauss)

Sur  $\mathbb{C}$ ,  $P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$

**Théorème :** Sur  $\mathbb{R}$ ,  $P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_p) (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1) \dots (x^2 + \alpha_m x + \beta_m)$   
avec  $p + 2m = n$  et toutes les expressions du second degré irréductibles, c'est à dire  $\Delta < 0$ .

Quand on a tous les facteurs d'un polynôme, pour retrouver celui-ci, il ne faut pas oublier le coefficient dominant  $a_n$ .

**Définition :** Un polynôme est dit **scindé** si et seulement si il est factorisable en produit d'expressions du premier degré.

Sur  $\mathbb{C}$  un polynôme est donc toujours scindé.

Sur  $\mathbb{R}$ , il faut et il suffit qu'il n'ait pas de racines complexes non réelles.

**Théorème :**  $P(x)$  est divisible par  $(x - \alpha) \Leftrightarrow P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha$  est racine de  $P$

**Théorème :**  $P(x)$  est divisible par  $(x - \alpha)^k \Leftrightarrow P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$   
 $\Leftrightarrow \alpha$  est racine d'ordre  $k$  au moins de  $P$

**Théorème :** Un polynôme de degré  $n$  qui a au moins  $n + 1$  racines distinctes ou confondues est nul.

En particulier, un polynôme nul sur un intervalle non réduit à un point est nul sur  $\mathbb{R}$ .

**Théorème :** Si  $P$  est scindé,  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ ,  $x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

Pour le degré 2,  $x^2 - Sx + P = 0$  est tel que :  $S = x_1 + x_2$ , et  $P = x_1 x_2$   
 $S$  est la somme des racines et  $P$  leur produit.

### 8.2. Division Euclidienne

**Théorème :** Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes,  $B \neq 0$ ,

alors il existe un unique couple  $(Q, R)$  tel que  $\begin{cases} A = BQ + R \\ \text{degré}(R) < \text{degré}(B) \end{cases}$

En pratique, quand on écrit la division de  $A$  par  $B$ , on prendra soin de bien écrire les polynômes par puissances décroissantes.

$B|A \Leftrightarrow$  Le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$  est nul

$\Leftrightarrow$  Toutes les racines de  $A$  sont racines de  $B$  avec au moins le même ordre de multiplicité.

On pensera à cette dernière équivalence quand les degrés sont petits...

### 8.3. Fractions Rationnelles

**Théorème :** Soit :  $F = \frac{A}{B}$ , une fraction rationnelle irréductible.

$$\text{Alors : } \frac{A(X)}{B(X)} = Q(X) + \frac{R(X)}{B(X)}$$

avec  $Q(x)$  le quotient et  $R(X)$  le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $Q$ .

**Définition :**  $Q(x)$  est alors appelée la **partie entière** de la fraction rationnelle  $\frac{A(X)}{B(X)}$ .

## 9. Espaces Vectoriels

### 9.1. Structure d'espace vectoriel

**Définition :**  $(E, +, \cdot)$  est un **espace vectoriel** sur  $\mathbb{K} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (E, +) \text{ est un groupe commutatif} \\ \left\{ \begin{array}{l} \forall u, v \in E \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v \\ (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u \\ \lambda \cdot (\mu \cdot u) = \lambda \mu \cdot u \\ 1 \cdot u = u \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$

**Définition :** On appelle **vecteurs** les éléments de  $E$  et **scalaires** les éléments de  $\mathbb{K}$ .

Un espace vectoriel  $E$  possède une structure de groupe additif, l'élément neutre pour l'addition est le vecteur nul, noté  $0_E$  ou simplement  $0$ .

On prendra soin de ne pas le confondre avec le scalaire  $0 \dots$

### 9.2. Sous-espace vectoriel

**Théorème :**  $F \subset E$  est un **sous-espace vectoriel** de  $E \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F \text{ est non vide} \\ \forall u, v \in F, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad (\lambda \cdot u + \mu \cdot v) \in F \end{array} \right.$

C'est à dire  $F$  est non vide et stable par combinaison linéaire.

Ce théorème sert souvent pour montrer que  $F$  est un espace vectoriel en montrant qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace connu et identifié...

On peut aussi montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  en montrant :

- que  $F$  est le noyau d'une certaine application linéaire ;
- ou que  $F$  est défini comme engendré par une certaine famille de vecteurs ;
- ou que  $F$  est l'intersection de deux sous-espaces vectoriels.

### 9.3. Somme de sous-espaces vectoriels

**Définition :**  $E = E' + E'' \Leftrightarrow$  tout vecteur  $x$  de  $E$  est somme d'un vecteur  $x'$  de  $E'$  et d'un vecteur  $x''$  de  $E''$

On a la même définition pour la somme de plus de deux sous-espaces vectoriels.

**Définition :**  $E' + E''$  est **directe**  $\Leftrightarrow E' \cap E'' = \{0\} \Leftrightarrow$  les composantes  $x'$  et  $x''$  de  $x$  sont uniques. La somme directe des deux sous-espaces est alors notée  $E' \oplus E''$ .

**Définition :** On dit que les sous-espaces  $E'$  et  $E''$  sont **supplémentaires** dans  $E \Leftrightarrow E = E' \oplus E''$

**Théorème :**  $E = E' \oplus E'' \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} E = E' + E'' \\ E' \cap E'' = \{0\} \end{array} \right.$

On a un autre théorème en dimension finie au 9.6..

**Exemple :** Donnons deux exemple, l'un en dimension finie et l'autre en dimension infinie :

- dans l'ensemble des matrices carrées  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , l'ensemble  $\mathcal{S}$  des matrices symétriques et l'ensemble  $\mathcal{I}$  des matrices anti-symétriques sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires ;
- dans l'ensemble des applications  $\mathcal{A}([-a, a], \mathbb{K})$ , l'ensemble  $\mathcal{P}$  des applications paires et l'ensemble  $\mathcal{I}$  des applications impaires sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

#### 9.4. Norme sur $\mathbb{R}^m$

**Définition :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ u \mapsto \|u\| \end{array} \right. \text{ est une norme } \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \forall u, v \in \mathbb{R}^m, & \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ \forall u \in \mathbb{R}^m, \forall \lambda \in \mathbb{K}, & \|\lambda \cdot u\| = |\lambda| \|u\| \quad (\text{positive homogénéité}) \\ \forall u \in \mathbb{R}^m, & \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0 \quad (\text{séparation}) \end{array} \right.$$

**Définition :** Une **boule ouverte** de centre  $u_0$  et de rayon  $r$  est :

$$B_O(u_0, r) = \{v \in \mathbb{R}^m, \quad d(u_0, v) < r\}$$

Une **boule fermée** de centre  $u_0$  et de rayon  $r$  est :

$$B_F(u_0, r) = \{v \in \mathbb{R}^m, \quad d(u_0, v) \leq r\}$$

Une **partie bornée** de  $\mathbb{R}^m$  est une partie de  $\mathbb{R}^m$  incluse dans une certaine boule (ouverte ou fermée).

Une **partie ouverte** ou un **ouvert** de  $\mathbb{R}^m$  est une partie  $A$  telle que :

$$\forall u \in A, \quad \exists r > 0, \quad B_O(u, r) \subset A$$

C'est à dire que tout point de  $A$  est le centre d'une boule ouverte, de rayon non nul, complètement incluse dans  $A$ .

Une **partie fermée** ou un **fermé** de  $\mathbb{R}^m$  est une partie telle que son complémentaire  $A$  soit un ouvert.

Une boule ouverte est un ouvert, une boule fermée est un fermé.  
 $\mathbb{R}^m$  et  $\emptyset$  sont ouverts et fermés.

#### 9.5. Espaces vectoriels de dimension finie : base

**Définition :**  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est **génératrice** de  $E \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in E, \quad \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \\ x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \end{array} \right.$

**Définition :**  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est **libre** de  $E \Leftrightarrow (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0)$

**Définition :** Une **base** est une famille libre et génératrice.

**Définition :** Un espace vectoriel est dit de **dimension finie**  $\Leftrightarrow$  il possède une base comptant un nombre fini de vecteurs. Sa dimension est alors le nombre de vecteurs de cette base.

**Théorème :** Toutes les bases de  $E$  ont le même nombre de vecteurs qui est, par définition, la dimension de  $E$ .

**Théorème :** Si  $E$  est de dimension  $n$  :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ est une base } \Leftrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ libre } \Leftrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ génératrice}$$

**Théorème :** *Théorème de la base incomplète*

Si  $E$  est de dimension  $n$  et  $p \leq n$  avec  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  une famille libre, alors, il existe  $(x_{p+1}, \dots, x_n)$  tels que  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  soit une base de  $E$ . C'est à dire que toute famille libre est le début d'une base.

**Théorème :** *Théorème belge*

Les coordonnées du vecteur  $\vec{v}$  dans la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  sont :  $(0, 1, 0)$ .

## 9.6. Rang d'une famille (finie) de vecteurs

### Définition :

Le **rang** d'une famille de vecteurs est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs.

### Théorème :

$$E' \text{ et } E'' \text{ sont } \mathbf{supplémentaires} \text{ de } E \Leftrightarrow E = E' \oplus E'' \Leftrightarrow \begin{cases} E', E'' \text{ deux sous-espaces vectoriels de } E \\ \dim(E) = \dim(E') + \dim(E'') \\ E' \cap E'' = \{0\} \end{cases}$$

Remarquons qu'on peut remplacer la condition  $E' \cap E'' = \{0\}$  par  $E = E' + E''$

On a un autre théorème en dimension infinie au 9.3..

## 9.7. Espaces vectoriels usuels

- $\mathbb{R}[X]$  et  $\mathbb{C}[X]$  sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ , de dimension infinie.
- $\mathbb{R}_n[X]$  et  $\mathbb{C}_n[X]$  sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ , de dimension  $n + 1$ , de base canonique  $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ .
- $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{C}^n$  sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ , de dimension  $n$ . Les vecteurs de la base canonique ont une composante égale à 1 et les autres composantes nulles.
- $\mathcal{A}(A, E)$  avec  $A$  non vide et  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .
- Si  $A \in \mathbb{R}$ , alors :  $\mathcal{C}^k(A, \mathbb{R})$  et  $\mathcal{C}^k(A, \mathbb{C})$  avec  $A$  non vide et  $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ , respectivement.
  - Sur  $A$  symétrique par rapport à l'origine, les applications paires et les applications impaires sont des sous-espaces vectoriels des précédents.
  - Sur un ensemble allant jusque  $+\infty$  ou  $-\infty$ , les applications tendant vers 0 à l'infini forment aussi un sous-espace vectoriel des précédents.
  - Il en est de même des applications bornées sur  $A$ ...
- L'ensemble des suites réelles ou complexes ont une structure d'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ , respectivement.
  - Les suites réelles ou complexes tendant vers 0 à l'infini forment des sous espaces vectoriels des précédents.
  - Il en est de même des suites bornées...
- $\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est le plus petit sous-espace vectoriel de l'espace dans lequel se trouvent les vecteurs :  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .  
On l'appelle l'espace vectoriel engendré par  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .  
Il est de dimension  $n$  si et seulement si ces vecteurs forment une famille libre.
- $\mathcal{L}(E, F)$  et  $\mathcal{L}(E)$  les ensembles d'applications linéaires de  $E$  dans  $F$  ou de  $E$  dans  $E$ .
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  les ensembles de matrices  $n$  lignes,  $p$  colonnes ou carrées  $n \times n$ , de dimensions respectives  $np$  et  $n^2$ . Les vecteurs de la base canoniques sont les matrices qui ont un élément égal à 1 et les autres nuls.

## 10. Applications Linéaires

### 10.1. Applications linéaires

**Définition :**  $f : E \rightarrow F$ , avec  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$  est **linéaire**, ou est un **morphisme**,

$$\text{ou encore un } \mathbf{homomorphisme} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall u, v \in E \\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \end{cases} f(\lambda.u + \mu.v) = \lambda.f(u) + \mu.f(v)$$

$f : E \rightarrow E$ , linéaire est un **endomorphisme**

$f : E \rightarrow F$ , linéaire bijective est un **isomorphisme**

$f : E \rightarrow E$ , linéaire bijective est un **automorphisme**

$f : E \rightarrow \mathbb{K}$ , linéaire est une **forme linéaire**.  $\mathbb{K}$  est un espace vectoriel sur lui-même.

**Théorème :**  $\mathcal{L}(E, F)$  et  $\mathcal{L}(E)$  sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ .

Si  $E$  et  $F$  sont de dimension finies  $n$  et  $p$ , la dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$  est  $n \times p$  et celle de  $\mathcal{L}(E)$  est  $n^2$

## 10.2. Sous espace vectoriel stable par un endomorphisme

**Définition :** Soit  $F$  un sous espace vectoriel de  $E$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

On dit que  $F$  est stable par  $f \Leftrightarrow \forall u \in F, f(u) \in F$ .

## 10.3. Image et noyau

**Définition :** Le **noyau** de  $f$ , linéaire, est :  $\ker(f) = \{u \in E, f(u) = 0\}$ .

**Définition :** L'**image** de  $f$ , linéaire, est :  $\text{Im}(f) = \{v \in F, \exists u \in E, v = f(u)\}$ .

**Théorème :**  $\left. \begin{array}{l} \text{L'image d'un s.e.v de } E \\ \text{L'image de } E \end{array} \right\} \text{ par } f : E \rightarrow F, \text{ linéaire, est un sous-espace vectoriel de } F.$

**Théorème :**

L'image réciproque d'un s.e.v de  $F$  par  $f : E \rightarrow F$ , linéaire, est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Théorème :** Le noyau de  $f : E \rightarrow F$ , linéaire, est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Théorème :**  $f : E \rightarrow F$ , linéaire, est injective  $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0\}$

En dimension finie, des bases étant choisies,

- on recherche le noyau en résolvant un système linéaire sans second membre, la dimension du noyau est la dimension de l'espace de départ moins le rang du système, c'est aussi le nombre d'inconnues auxiliaires. On obtient une base du noyau en distribuant tour à tour un 1 et des 0 sur les inconnues auxiliaires ;
- on recherche l'image en écrivant que les images des vecteurs de la base forment une famille génératrice de l'image, puis en ôtant les vecteurs inutiles de cette famille. La dimension de l'image est le rang de l'application linéaire, de la matrice.

## 10.4. Projecteur

**Définition :**  $p : E \rightarrow E$  est un **projecteur**  $\Leftrightarrow p \circ p = p$

**Théorème :**  $p : E \rightarrow E$  est un projecteur  $\Rightarrow E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$ ,  
mais ceci n'est pas une équivalence.

$E = E_1 \oplus E_2$  permet de définir  $p$  la projection sur  $E_1$ , parallèlement à  $E_2$  et  $q$  la projection sur  $E_2$ , parallèlement à  $E_1$ .  
On a alors  $p + q = \text{Id}$ .

## 10.5. Symétries

**Définition :**  $s : E \rightarrow E$  est une **symétrie**  $\Leftrightarrow s \circ s = \text{Id}$

**Théorème :**  $s$  est une symétrie  $\Leftrightarrow p = \frac{s + \text{Id}}{2}$  est un projecteur.  
 $p$  est un projecteur  $\Leftrightarrow s = 2p - \text{Id}$  est une symétrie.

## 10.6. Théorème du rang

**Définition :**  $f : E \rightarrow F$ , linéaire, avec  $E$  de dimension finie,  
le **rang de  $f$**  est  $\text{rg}(f) = \dim(f(E)) = \dim(\text{Im}(f))$ .

**Théorème :**  $f : E \rightarrow F$ , linéaire, avec  $E$  de dimension finie  
 $\Rightarrow \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f)$

**Théorème :**  $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$   
et  $\dim(\mathcal{L}(E)) = \dim(E)^2$

**Théorème :** Si  $\dim(E) = \dim(F)$ , et donc en particulier dans le cas d'un endomorphisme en dimension

finie, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ bijective} \\ \Leftrightarrow \ker(f) = \{0\} \\ \Leftrightarrow \text{Im}(f) = F \\ \Leftrightarrow f \text{ injective} \\ \Leftrightarrow f \text{ surjective} \\ \Leftrightarrow f \text{ transforme une base de } E \text{ en une base de } F \\ \Leftrightarrow f \text{ transforme toute base de } E \text{ en une base de } F \end{array} \right.$$

## 10.7. Système linéaire

Pour résoudre un système linéaire de  $n$  équations à  $p$  inconnues :

- On rend le système trapézoïdal en appliquant la méthode du pivot de Gauss
- S'il y a des paramètres, on ne discute que lorsqu'on y est obligé pour appliquer le pivot de Gauss, au besoin en changeant l'ordre des lignes ou des colonnes.
  - On connaît à ce moment le rang du système : c'est le nombre d'équations linéaires indépendantes. Si le système est sans second membre, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension le nombre d'inconnues moins le rang.
  - On voit à ce moment si le système est incompatible.
  - S'il est compatible, le rang du système est le nombre d'équations restantes
    - ◊ Si on a, à ce moment, autant d'équations que d'inconnues : le système a une solution unique
    - ◊ Si on a, à ce moment, moins d'équations que d'inconnues, on garde autant d'inconnues principales que le rang. Les autres deviennent des inconnues auxiliaires, qui se traitent comme des paramètres.

# 11. Matrices

## 11.1. Généralités

### a/ Produit de matrices

Si  $A$  est une matrice  $n$ -lignes et  $m$ -colonnes,  $B$  une matrice  $m$ -lignes et  $p$ -colonnes,  
alors :  $C = AB$  est une matrice  $n$ -lignes et  $p$ -colonnes vérifiant :  $c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$ .

Ce qui se schématise :

$$\left( \begin{array}{ccc} \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{im} \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{c|c|c} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{mj} & \vdots \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc} \vdots & & \\ \dots & c_{ij} & \dots \\ \vdots & & \end{array} \right)$$

### b/ Produit de matrices définies par blocs

Si deux matrices sont définies par blocs, on peut parfois effectuer leur produit en travaillant par blocs. C'est à dire :

$$\begin{pmatrix} (A) & (B) \\ (C) & (D) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (A') & (B') \\ (C') & (D') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A) \times (A') + (B) \times (C') & (A) \times (B') + (B) \times (D') \\ (C) \times (A') + (D) \times (C') & (C) \times (B') + (D) \times (D') \end{pmatrix}$$

Les dimensions des matrices doivent être compatibles, à savoir :

- Le nombre de **colonnes** de A et C doit être le nombre de **lignes** de A' et B'.
- Le nombre de **colonnes** de B et D doit être le nombre de **lignes** de C' et D'.

D'autre part, rappelons que le produit de matrices n'est pas commutatif, l'ordre dans lequel on écrit ces produits est donc fondamental...

c/ Transposée d'un produit

**Théorème :** On a :  ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$

## 11.2. Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice est le rang de l'application linéaire associée, c'est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes.

C'est aussi le rang de sa transposée, donc la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs lignes.

On ne change pas le rang :

- en supprimant une ligne ou une colonne combinaison linéaire des autres lignes ou colonnes ;
- en supprimant une ligne ou une colonne nulle ;
- en ajoutant à une ligne ou une colonne une combinaison linéaire des autres lignes ou colonnes ;
- en multipliant une ligne ou une colonne par un scalaire non nul.

On ne confondra pas les manipulations qui ne changent pas le rang et les manipulations qui ne changent pas la valeur d'un déterminant.

## 11.3. Généralités sur les matrices carrées

a/ Matrices symétriques et antisymétriques

**Définition :** Une matrice carré M est symétrique  $\Leftrightarrow {}^tM = M \Leftrightarrow a_{ji} = a_{ij}$

**Définition :** Une matrice carré M est anti-symétrique  $\Leftrightarrow {}^tM = -M \Leftrightarrow a_{ji} = -a_{ij}$

Les éléments de la diagonale sont donc nuls.

**Théorème :** Le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques sont supplémentaires.

De plus :  $M_S = \frac{M + {}^tM}{2}$  est toujours symétrique, et  $M_A = \frac{M - {}^tM}{2}$  est antisymétrique.

Elles vérifient :  $M = M_S + M_A$ .

En dimension 3, la matrice symétrique la plus générale est :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

et la matrice antisymétrique la plus générale possible est :

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

## b/ Inverse d'une matrice

**Théorème :** Si on a  $M$  une matrice carrée telle que :  $MM' = I_n$ , ou telle que :  $M'M = I_n$ , alors  $M$  est inversible et  $M^{-1} = M'$ .

**Théorème :** Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

### Calcul pratique :

En général, on inverse une matrice carrée en inversant le système linéaire correspondant avec un second membre arbitraire :  $Y = MX \Leftrightarrow X = M^{-1}Y$

Cependant, parfois, quand la question est plus théorique, on peut utiliser le théorème suivant :

**Théorème :**  $M$ , une matrice inversible,  $\Delta$  son déterminant et  $\Delta_{ij}$  le déterminant obtenu en enlevant la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne, alors :

$$M^{-1} = \frac{1}{\Delta} \times \text{transposée de } \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \dots & (-1)^{i+j} \Delta_{ij} & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

## c/ Inverse d'un produit

**Théorème :** On a :  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

## d/ Inversion et Transposition

**Théorème :**  $A$  une matrice carrée inversible, alors :  ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1} = {}^tA^{-1}$ .

## 11.4. Matrice d'une application linéaire

**Définition :**  $f : E \rightarrow F$ , linéaire, avec  $E$  et  $F$  de dimensions finies  $n$  et  $p$ , munis de bases  $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}_F = (e'_1, \dots, e'_p)$ , on appelle **matrice de  $f$  dans ces bases**  $M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}$  la matrice  $p$  lignes et  $n$  colonnes dont l'élément  $a_{i,j}$ ,  $i^{\text{ème}}$  ligne et  $j^{\text{ème}}$  colonne est tel que  $f(e_j) = \sum_{i=1}^p a_{i,j} e'_i$ .

On a en colonnes, les coordonnées des images des vecteurs de la base de  $E$  écrits dans la base de  $F$ .

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,j} & \dots & a_{p,n} \\ f(e_1) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_n) \end{pmatrix} \begin{matrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_i \\ \vdots \\ e'_p \end{matrix}$$

## 11.5. Matrice de Passage

**Définition :** On appelle **matrice de passage** ou  $P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$  la matrice constituée en colonnes des coordonnées des vecteurs de la nouvelle base  $\mathcal{B}_2$  écrits dans l'ancienne  $\mathcal{B}_1$ .

On l'appelle aussi **matrice de changement de base**.

C'est donc une matrice inversible.

Toute matrice carrée inversible peut toujours s'interpréter

- comme matrice d'un endomorphisme dans une certaine base,
- ou comme matrice de changement de base.

Passer d'une interprétation à une autre permet parfois de faire avancer le problème.

## 11.6. Changements de base

**Théorème :** Si on appelle  $X$  et  $X'$  les vecteurs colonnes, coordonnées d'un vecteur dans l'ancienne et la nouvelle base, et  $P$  la matrice de passage, on a  $X = PX'$  ou bien  $X' = P^{-1}X$ .

**Théorème :** Si on appelle  $M$  et  $M'$  les matrices d'un endomorphisme dans l'ancienne et la nouvelle base, et  $P$  la matrice de passage, on a  $M' = P^{-1}MP$  ou bien  $M = PM'P^{-1}$ .

**Définition :**  $M$  et  $M'$  sont semblables  $\Leftrightarrow \exists P$  inversible telle que  $M' = P^{-1}MP$   
 $\Leftrightarrow$  ce sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.

## 11.7. Trace d'une matrice

**Définition :** La trace d'une matrice carrée est la somme de ses éléments diagonaux.

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

**Théorème :** On a :  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

**Théorème :** Si  $M$  et  $M'$  sont semblables, on a :  $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(M')$

## 12. Déterminants

### 12.1. Ordre 2 et 3

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \text{ peut se développer par la règle de Sarrus } \searrow + \searrow + \searrow - \nearrow - \nearrow - \nearrow$$

La règle de Sarrus n'est absolument pas généralisable à des ordres supérieurs !

### 12.2. Matrice triangulaire

**Théorème :** Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses éléments diagonaux.

### 12.3. Ordre quelconque

La règle des signes est :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots & \dots \\ - & + & - & & \\ + & - & + & & \\ & & & + & \\ \vdots & & & & \ddots \\ \vdots & & & & & \ddots \\ & & & & & & + & - \\ & & & & & & - & + \end{vmatrix}$$

On développe suivant une ligne ou une colonne en tenant compte de la règle de signes, on a ainsi une somme de termes du type :  $(-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$ , où  $a_{ij}$  est le coefficient de la matrice et  $\Delta_{ij}$  est le déterminant d'ordre  $n-1$  obtenu en enlevant la ligne  $i$  et la colonne  $j$  correspondante.

**Théorème :**  $\Delta = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$

## 12.4. Déterminant d'un produit, d'une matrice inversible

**Théorème :** Pour  $A$  d'ordre  $n$ ,  $A$  inversible  $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$

**Théorème :**  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ , et si  $A$  est inversible,  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

## 12.5. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

**Théorème :**  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ,  $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ ,  $O$  est la matrice nulle de  $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$  et  $p+q = n$ . Alors,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix} = \det(A) \times \det(C)$$

Cette propriété **ne se généralise pas** au déterminant d'une matrice définie par blocs et non triangulaire par blocs.

# 13. Réduction des Endomorphismes

## 13.1. Valeurs propres et vecteurs propres

**Définition :**  $f : E \rightarrow E$  linéaire,

un couple  $(\lambda, u)$  ( $u \neq 0$ ) est un **couple valeur propre, vecteur propre** de  $E \Leftrightarrow f(u) = \lambda.u$

**Définition :** Pour  $\lambda$  une valeur propre de  $E$ , on appelle **sous-espace propre** associé à  $\lambda$ ,

$$E_\lambda = \{u / f(u) = \lambda.u\} = \ker(f - \lambda Id_E)$$

C'est clairement un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Le noyau est donc aussi le sous-espace propre associé à la valeur propre 0.

**Théorème :** Les sous-espaces propres sont toujours en somme directe. Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres **distinctes** est libre.

## 13.2. Polynôme caractéristique

**Définition :**  $f$  un endomorphisme de  $E$  de dimension  $n$ ,  $A$  sa matrice dans une base quelconque, le **polynôme caractéristique** de  $f$  est :  $P_f(\lambda) = P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ .

**Théorème :** Le polynôme caractéristique de  $f$  est indépendant de la base choisie.

Les racines du polynôme caractéristique de  $f$  sont **les** valeurs propres de  $f$ .

- Sur  $\mathbb{C}$ , le polynôme caractéristique est toujours scindé. Il y a donc toujours  $n$  valeurs propres distinctes ou confondues.
- Sur  $\mathbb{R}$ , ça n'est pas toujours le cas... Le polynôme caractéristique peut avoir des racines complexes non réelles.

**Théorème :**  $\lambda$  une valeur propre de  $f$ , alors :

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq \text{ordre de multiplicité de } \lambda \text{ comme racine de } P_f$$

**Théorème :** Quand le polynôme caractéristique est scindé, la trace de l'endomorphisme, ou de la matrice, est égale à la somme de ses valeurs propres.

Cela fournit une « vérification » élémentaire de la recherche des valeurs propres.

### 13.3. Diagonalisabilité

**Définition :** Un endomorphisme est **diagonalisable**  $\Leftrightarrow$  il existe une base de vecteurs propres

**Théorème :**

$$A \text{ (ou } f \dots) \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow \begin{cases} P_A(\lambda) \text{ est scindé} \\ \dim(E_\lambda) = \text{ordre de multiplicité de } \lambda \text{ dans } P_A \end{cases}$$

**Théorème :** En particulier, lorsque  $P_A(\lambda)$  est scindé à racines simples,  $A$  (ou  $f \dots$ ) est diagonalisable. C'est une condition suffisante mais non nécessaire.

### 13.4. Diagonalisabilité et diagonalisation

Quand une matrice  $A$  est **diagonalisable**, une erreur courante est de dire que, *dans une certaine base*,  $A$  est diagonale, ce qui est bien sûr grossièrement faux et même stupide.

On a simplement une matrice de passage  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que  $A = PDP^{-1}$  ou bien  $D = P^{-1}AP$ .

La confusion provient de ce que  $A$  et  $D$  sont les matrices d'un **même** endomorphisme dans deux bases différentes...

Il est par contre exact de dire que si un endomorphisme  $f$  est diagonalisable, et s'il est de matrice  $A$  dans la base  $\mathcal{B}$ , il existe une base  $\mathcal{B}'$  dans laquelle sa matrice est  $D$ , diagonale.

$P$  étant la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{B}'$ , on a alors :  $A = PDP^{-1}$  et  $D = P^{-1}AP$ .

### 13.5. Triangularisation (ou trigonalisation)

**Théorème :** Si le polynôme caractéristique est scindé, il existe une base où la matrice est triangulaire.

En particulier, sur  $\mathbb{C}$ , toute matrice est triangularisable, ou trigonalisable.

### 13.6. Puissances d'une matrice

On fera attention, par convention :  $B^0 = I_n$ , la matrice identité.

- Si  $A$  est diagonalisable, et  $D$  diagonale semblable à  $A$ , alors  $A = PDP^{-1}$  et  $A^k = PD^kP^{-1}$ .
- Si  $A = M + N$ , avec  $MN = NM$ , ce qu'il faut impérativement vérifier, alors :  $A^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} M^k N^{p-k}$

Ceci est surtout utilisé lorsque  $M^2$  ou  $M^3$  est nulle, car alors la somme se réduit aux 3 ou 4 premiers termes.

- Si  $A^2 = \alpha A + \beta I$  alors  $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$  et on peut chercher des relations de récurrence entre les coefficients en écrivant  $A^{n+1}$  de deux façons :  $A^{n+1} = A^n \times A$ .

## 14. Espaces Préhilbertiens Réels et Euclidiens

### 14.1. Produit scalaire

**Définition :** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , une **forme bilinéaire symétrique** sur  $E$  est une application de  $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$

- linéaire par rapport à chacune des variables (l'autre étant fixée) et
- symétrique (on peut inverser l'ordre des variables).

**Définition :** Si  $\varphi$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ , alors :

$$q : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto q(u) = \varphi(u, u) \end{cases} \text{ est une forme quadratique, appelée } \mathbf{forme quadratique associée} \text{ à } \varphi.$$

**Théorème :** Par ailleurs, si  $q$  est une forme quadratique sur  $E$ , alors  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\varphi(u, v) = \frac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2}$$

est une forme bilinéaire symétrique. C'est la **forme polaire** de  $q$ .

**Théorème :** Une **forme quadratique** sur  $\mathbb{R}^n$  est une application de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  qui se met sous la forme d'un polynôme homogène de degré 2 des coordonnées du vecteur de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition :**  $E$  un espace vectoriel réel.

Un **produit scalaire** est une application de  $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  bilinéaire, symétrique, définie-positive.

En pratique, on montre :

- $\forall u, v \in E, \quad \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$  La forme est symétrique.
- $\left. \begin{array}{l} \forall u_1, u_2, v \in E \\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \langle \lambda.u_1 + \mu.u_2, v \rangle = \lambda \langle u_1, v \rangle + \mu \langle u_2, v \rangle$  La forme est donc bilinéaire symétrique.
- $\forall u, \in E, \quad \langle u, u \rangle \geq 0$  La forme est positive.
- $\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$  La forme est définie-positive

C'est souvent le dernier point qui pose problème.

Quand le produit scalaire est défini par une intégrale, c'est à ce moment qu'on utilise le théorème des 3 conditions.

**Théorème :**  $E$  étant muni d'une base  $(e_1, \dots, e_n)$ ,

On note :  $U : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $V : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  les vecteurs colonnes des coordonnées de  $u$  et  $v$  dans la base,

On note  $A$ , la matrice symétrique à  $a_{i,j} = \langle e_i, e_j \rangle$ , alors :

$$\langle u, v \rangle = {}^tUAV$$

$A$  est ainsi la **matrice de la forme bilinéaire symétrique**, encore appelée **matrice du produit scalaire** dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ .

Si, de plus, la base est orthonormale, alors on a :

$$\langle u, v \rangle = {}^tUV = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

**Définition :** La **norme** euclidienne est :  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

C'est en principe, la seule norme qu'on utilise.

**Exemple :** Sur les matrices carrées, le produit scalaire usuel est :  $\langle A, B \rangle = \text{Trace}({}^tAB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j}$

## 14.2. Espaces vectoriels préhilbertiens et euclidiens

**Définition :**  $E$  un espace vectoriel réel est dit **préhilbertien réel** quand il est muni d'un produit scalaire. Si, de plus, il est de dimension finie, il est dit **euclidien**.

### 14.3. Inégalités

**Théorème :** On a l'inégalité de Schwarz, ou de Cauchy-Schwarz :  $\forall u, v \in E, \quad |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ .

**Théorème :** On a l'inégalité triangulaire :  $\forall u, v \in E, \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ .

### 14.4. Endomorphismes symétriques

**Définition :** Un endomorphisme  $f$  est dit **symétrique**  $\Leftrightarrow \forall u, v \in E, \quad \langle f(u), v \rangle = \langle u, f(v) \rangle$

**Théorème :**  $f$  est symétrique  $\Leftrightarrow$  sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

### 14.5. Matrice symétrique réelle

**Théorème :** Une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale, c'est à dire avec **au besoin** une matrice de passage orthogonale, telle que :  $P^{-1} = {}^tP$ .

Les sous-espaces propres ainsi que les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux 2 à 2.

### 14.6. Procédé de Schmidt

**Théorème :** Tout espace vectoriel euclidien possède une base orthonormale.

Le procédé de Schmidt permet de construire effectivement une base orthonormale à partir d'une base quelconque.

• On part d'une base quelconque  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$

• On pose  $\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$

C'est le premier vecteur de la base orthonormale.

• On pose  $\varepsilon_2^* = e_2 + \lambda \cdot \varepsilon_1$

On cherche  $\lambda$  tel que  $\langle \varepsilon_2^*, \varepsilon_1 \rangle = 0$ , ce qui donne  $\lambda = -\langle e_2, \varepsilon_1 \rangle$

• On pose  $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_2^*}{\|\varepsilon_2^*\|}$

C'est le deuxième vecteur de la base orthonormale.

• On pose  $\varepsilon_3^* = e_3 + \lambda \cdot \varepsilon_1 + \mu \cdot \varepsilon_2$

On cherche  $\lambda$  et  $\mu$  tel que  $\begin{cases} \langle \varepsilon_3^*, \varepsilon_1 \rangle = 0 \\ \langle \varepsilon_3^*, \varepsilon_2 \rangle = 0 \end{cases}$ , d'où  $\begin{cases} \lambda = -\langle e_3, \varepsilon_1 \rangle \\ \mu = -\langle e_3, \varepsilon_2 \rangle \end{cases}$

• On pose  $\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_3^*}{\|\varepsilon_3^*\|}$

C'est le troisième vecteur de la base orthonormale.

• On continue ainsi en n'oubliant pas qu'à chaque étape, le calcul s'allonge...

• En pratique, on travaille en théorie le plus longtemps possible ! On profite ainsi de nombreuses simplifications a priori.

Ce qu'on peut voir en dimension 2 sur la figure 1, page suivante.

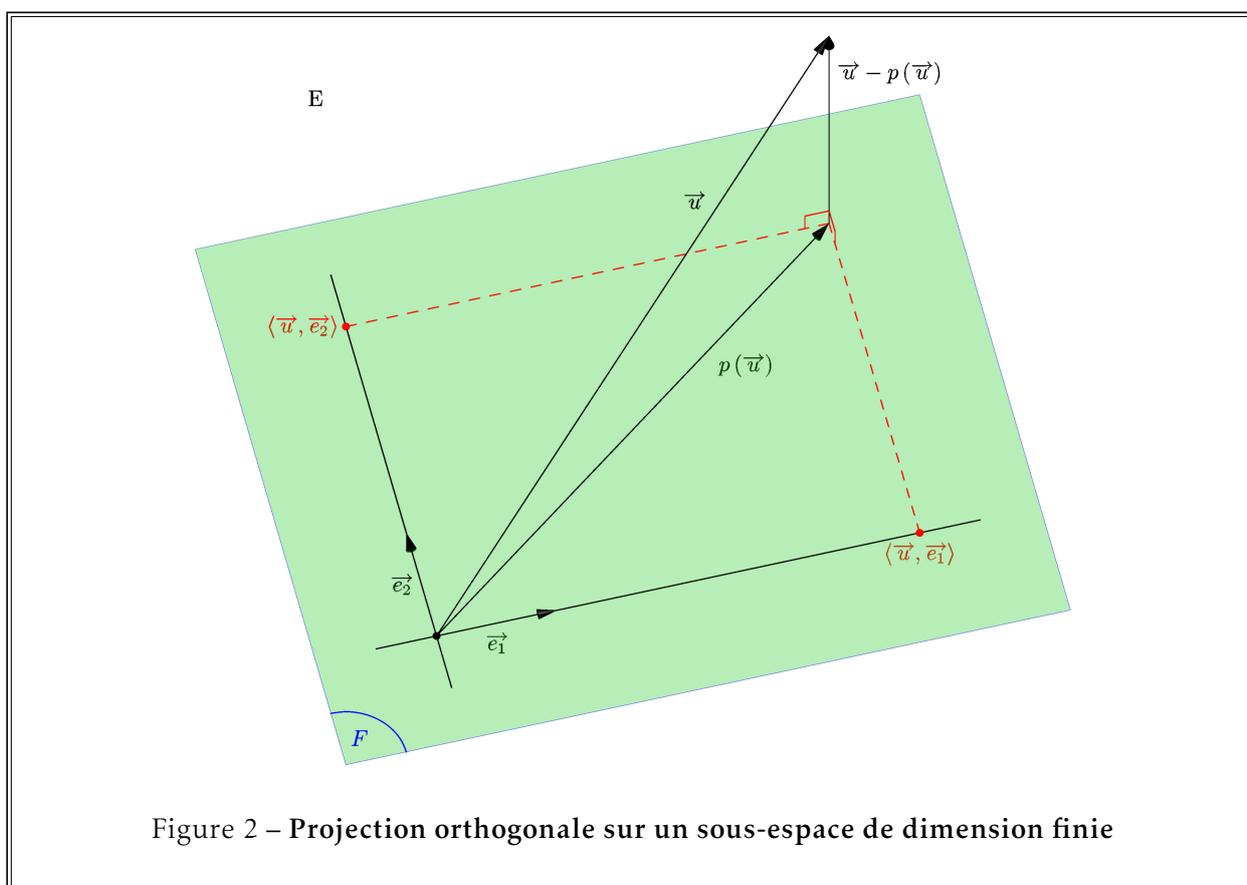
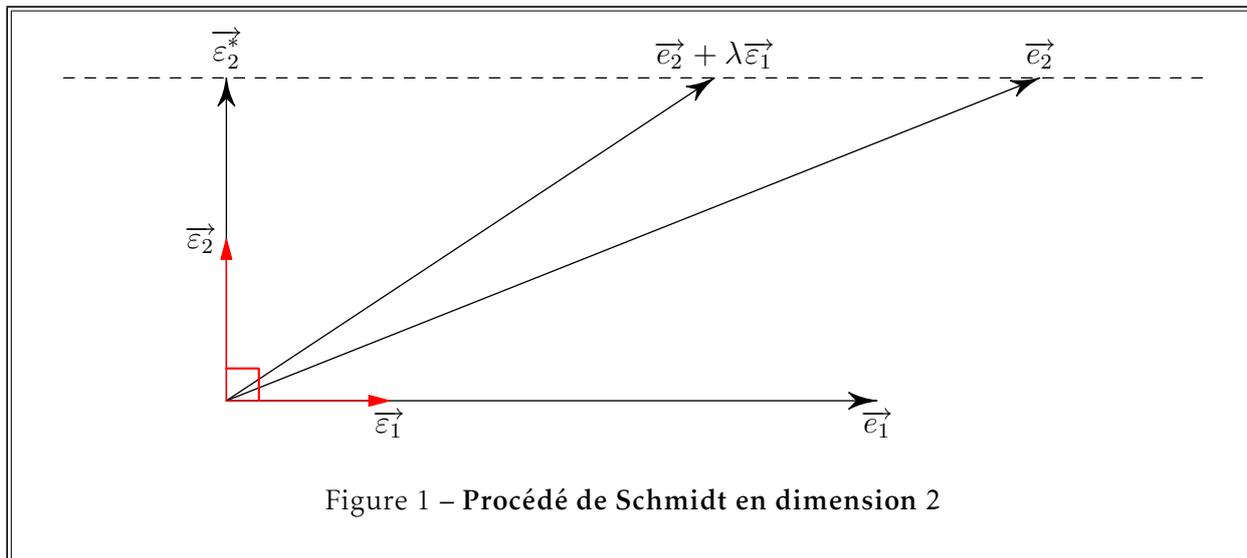
### 14.7. Projection orthogonale sur un sous espace de dimension finie

**Théorème :**  $E$  un espace vectoriel préhilbertien,  $F$  un sous espace vectoriel de dimension finie muni d'une base orthonormale  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ . Alors

$$p : u \rightarrow p(u) = \langle u, e_1 \rangle \cdot e_1 + \dots + \langle u, e_n \rangle \cdot e_n$$

définit un projecteur. Et comme  $(u - p(u)) \in F^\perp$ , on dit que  $p$  est la projection orthogonale sur  $F$ .

Ce qu'on peut voir sur la figure 2, page ci-contre.



#### 14.8. Méthode des Moindres Carrés

##### a/ Problème

On a un phénomène, physique par exemple, qui, en théorie suit une loi affine du type :  $y = ax + b$ . Par ailleurs, on cherche expérimentalement à vérifier les valeurs théoriques de  $a$  et  $b$ . Pour cela, on réalise une série de  $n$  mesures :  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ .

##### b/ Solution

On cherche à minimiser la somme des carrés des différences d'ordonnées entre les points  $(x_i, y_i)$  et  $(x_i, ax_i + b)$ .

Sur la figure 3, page suivante, les segments dont on minimise la somme des carrés des longueurs sont

verticaux et tracés en vert.

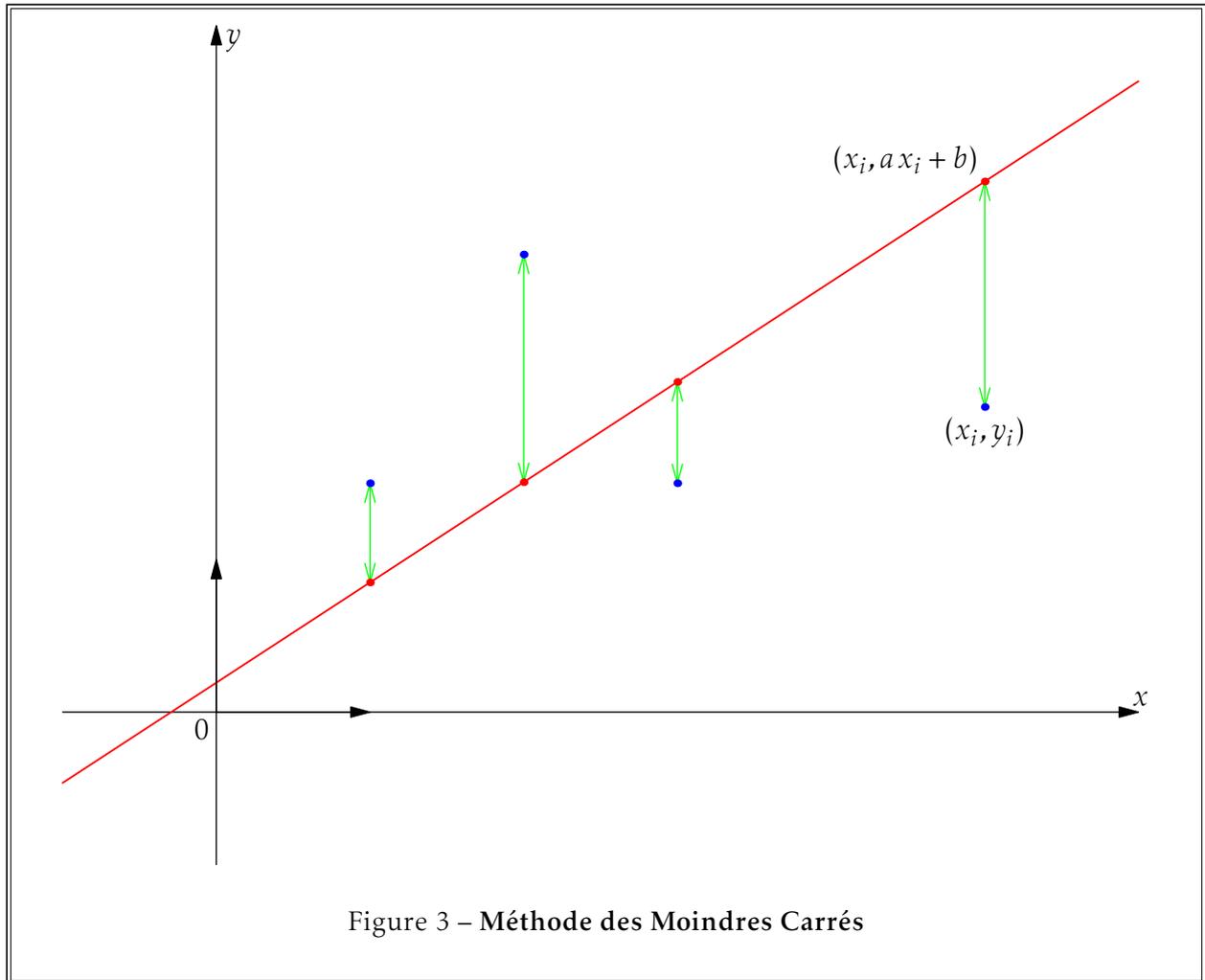


Figure 3 – Méthode des Moindres Carrés

On cherche donc à minimiser :  $\sum_{i=1}^n (y_i - a x_i - b)^2$ .

Pour cela, on annule les dérivées partielles par rapport à  $b$  et à  $a$ , ce qui donne en simplifiant un peu les égalités obtenues :

$$\sum_{i=1}^n y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + nb \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i$$

On résout simplement ce système de 2 équations à 2 inconnues  $a$  et  $b$ .

c/ Autre interprétation

Cela revient aussi simplement à ce que le vecteur  $\begin{pmatrix} a x_1 + b \\ a x_2 + b \\ \vdots \\ a x_n + b \end{pmatrix}$  soit la projection orthogonale du vecteur

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  sur l'espace vectoriel engendré par  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Les réels  $a$  et  $b$  sont alors les coordonnées de la projection orthogonale du vecteur indiqué dans cette base (non orthonormale). En écrivant les orthogonalités voulues, on obtient le même système.

## 15. Groupe Linéaire et Groupe Orthogonal

### 15.1. Groupe linéaire

**Théorème :**  $E$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel. L'ensemble des isomorphismes de  $E$ , muni de la loi  $\circ$  de composition des applications est un groupe, appelé groupe linéaire de  $E$  et noté  $GL(E)$ .

**Notation :** Si  $E = \mathbb{R}^n$  ou  $E = \mathbb{C}^n$ , le groupe linéaire de  $E$  se note  $GL_n$ . La loi est alors le produit des matrices.

### 15.2. Groupe orthogonal

**Définition :** Un endomorphisme  $f$  de  $E$  un espace vectoriel réel, est dit **orthogonal**

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow f \text{ conserve le produit scalaire} \\ &\Leftrightarrow \forall u, v \in E, \quad \langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

**Théorème :**  $f$  est orthogonal  $\Leftrightarrow f$  conserve la norme

$$\Leftrightarrow \forall u \in E, \quad \|f(u)\| = \|u\|$$

**Définition :** Une matrice  $M$  est **orthogonale**  $\Leftrightarrow M$  est la matrice d'un endomorphisme orthogonal dans une base orthonormale.

**Théorème :**  $M$  est orthogonale  $\Leftrightarrow$  les vecteurs colonnes de  $M$  sont normés et orthogonaux 2 à 2

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \text{les vecteurs lignes de } M \text{ sont normés et orthogonaux 2 à 2} \\ &\Leftrightarrow M^{-1} = {}^t M \\ &\Leftrightarrow M {}^t M = I \\ &\Leftrightarrow {}^t M M = I \end{aligned}$$

**Théorème :** L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de  $E$ , muni de la loi  $\circ$  de composition des applications est un groupe noté  $O(E)$ , sous groupe de  $GL(E)$ .

**Notation :** Si  $E = \mathbb{R}^n$ , le groupe orthogonal de  $E$  se note  $O(n)$ . La loi est alors le produit des matrices.

## Analyse

## 16. Suites

## 16.1. Suites

**Définition :**  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge** vers  $l$   
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, |u_n - l| \leq \varepsilon$

**Théorème :** La limite  $l$ , quand elle existe, est unique.

Cette définition est valable pour une suite réelle ou complexe.  
 Dans le cas d'une suite vectorielle, il suffit de remplacer  $|u_n - l|$  par  $\|u_n - l\|$ .

**Théorème :** L'ensemble des suites muni de la somme de deux suites et de la multiplication par un scalaire a une structure d'espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . Il en est de même de l'ensemble des suites convergentes.

## 16.2. Sous-suites

**Définition :**

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une **sous-suite** de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow \exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $(v_n) = (u_{\varphi(n)})$

**Théorème :**  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l \Rightarrow$  toute sous-suite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$   
 Si deux sous-suites ont des limites différentes ou si une sous-suite diverge, la suite diverge.

**Théorème :** Une suite convergente est bornée.

**Théorème :** Quand  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\left. \begin{array}{l} u_n \rightarrow l \\ v_n \rightarrow l' \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_n + v_n \rightarrow l + l' \\ u_n v_n \rightarrow ll' \\ \lambda u_n \rightarrow \lambda l \end{array} \right.$$

## 16.3. Suites vectorielles

**Théorème :** On a  $u_n = (u_{1n}, u_{2n}, \dots, u_{pn})$  et  $l = (l_1, l_2, \dots, l_p)$ , alors  $u_n \rightarrow l \Leftrightarrow \begin{cases} u_{1n} \rightarrow l_1 \\ u_{2n} \rightarrow l_2 \\ \vdots \\ u_{pn} \rightarrow l_p \end{cases}$

## 16.4. Suites réelles ou complexes

**Définition :** Deux suites sont **équivalentes**  $\Leftrightarrow u_n = v_n w_n$  avec  $w_n \rightarrow 1$ .  
 En pratique, si à partir d'un certain rang  $v_n \neq 0$ , cela revient à :  $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$ .

**Théorème :** Dans les conditions où les logarithmes sont définis :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \ln u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln v_n$$

On peut prendre le logarithme d'équivalents.

**Théorème :** La suite  $(u_n)$  converge  $\Leftrightarrow$  La série  $\sum(u_{n+1} - u_n)$  converge

## 16.5. Suites réelles

**Théorème :** Toute suite croissante majorée converge.

**Théorème :** Toute suite décroissante minorée converge.

**Théorème :** (suites adjacentes)

$$\left. \begin{array}{l} (u_n) \nearrow \\ (v_n) \searrow \\ (u_n - v_n) \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent vers la même limite}$$

## 16.6. Suites définies par une relation de récurrence

- On a  $u_0 \in D_f$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  et si  $u_n \in D_f$ ,  $u_{n+1} \in D_f$
- En tout état de cause, on résout d'abord l'équation :  $f(x) = x$ , ses solutions sont les limites éventuelles de  $(u_n)$ , les points fixes de  $f$ , dans la mesure où  $f$  est continue en ce point.
- Le procédé est basé sur l'inégalité des accroissements finis.
- Si, sur un intervalle  $I$  stable par  $f$ ,  $l$  un point fixe, et  $|f'(x)| \leq k < 1$ , on montre que  $|u_{n+1} - l| \leq k|u_n - l|$  et donc par récurrence immédiate, que  $|u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|$  ce qui assure la convergence.

## 16.7. Suites récurrentes linéaires

Il s'agit, comme dans toute « équation linéaire », d'ajouter une solution particulière du problème avec second membre à la solution générale du problème sans second membre.

a/ Suite récurrente linéaire simple

- $au_{n+1} + bu_n = 0$  La solution est géométrique  $u_n = \alpha \left(\frac{-b}{a}\right)^n$
- $au_{n+1} + bu_n = c$  Chercher une solution particulière sous forme de suite constante

b/ Suite récurrente linéaire double

- $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$  On calcule les solutions de l'équation caractéristique  $ar^2 + br + c = 0$ 
  - 2 racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$  :  $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$
  - 1 racine double  $r$  :  $u_n = \alpha r^n + \beta n r^n$
  - sur  $\mathbb{R}$ , 2 racines complexes  $r = s e^{\pm i\omega}$  :  $u_n = s^n (\alpha \cos n\omega + \beta \sin n\omega)$
- $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = d$  Chercher une solution particulière
  - constante  $\gamma$
  - ou, en cas d'échec,  $\gamma n$
  - ou, en cas de nouvel échec,  $\gamma n^2$

## 17. Fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

### 17.1. Ensemble de définition

L'**ensemble de définition** de  $f$  est l'ensemble des valeurs de  $x$  telles qu'on puisse effectivement calculer  $f(x)$ . Pour cela, on regarde les dénominateurs, racines, quotients, logarithmes, tangentes...

Le problème est plus complexe pour une fonction définie par une intégrale  $\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt$  ou  $\int_a^b f(x, t) dt$ . De plus, si l'intégrale est généralisée, il faut même chercher les  $x$  tels que l'intégrale converge...

### 17.2. Monotonie

**Définition :**  $f$  est **croissante** sur  $I$  un intervalle  $\Leftrightarrow (\forall a, b \in I, a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b))$

$f$  est **strictement croissante** sur  $I$  un intervalle  $\Leftrightarrow (\forall a, b \in I, a < b \Rightarrow f(a) < f(b))$

**Théorème :**  $f$  est dérivable sur  $I$ , un **intervalle**,  
 $f$  est **croissante** sur  $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$  sur  $I$

**Théorème :**  $f$  dérivable sur  $I$ , un **intervalle**,  
 $f'(x) \geq 0$  sur  $I$  et  $f'$  ne s'annule qu'en des points isolés,  $\Rightarrow f$  est strictement croissante sur  $I$ .

Cette dernière implication n'est pas une équivalence...

**Théorème :** Une fonction croissante, majorée sur  $[a, b]$ , admet une limite finie en  $b$ .

**Théorème :**  $f$  continue, strictement monotone sur  $I$  un intervalle est une bijection de  $I$  sur  $f(I)$ .  
De plus,  $f^{-1}$  est alors continue sur  $f(I)$ .

### 17.3. Limite et continuité

**Définition :**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$ .  
Si, de plus,  $l = f(a)$ , on dit que  $f$  est **continue** en  $a$ .

On a une autre définition de limite en  $+\infty$ , qu'on peut adapter en  $-\infty$ .

**Définition :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, x \geq A \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$ .

On a encore une définition quand la limite est infinie – qu'on peut adapter pour une limite  $-\infty$ .

**Définition :**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \alpha > 0, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A$ .

Et, enfin, une dernière définition pour une limite infinie à l'infini – qu'on peut...

**Définition :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A$ .

Pour éviter ces multiples définitions de la notion de limite, on peut considérer la droite « achevée » :  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

Mais il faut alors donner les définitions en terme de « voisinage ».

**Théorème :** Une fonction admettant une limite **finie** en un point est **bornée** au voisinage de ce point.

**Théorème :** Une somme, un produit, une combinaison linéaire, une composée, un quotient (quand ils sont définis...) de fonctions continues en un point sont continues en ce point.

### 17.4. Continuité sur un intervalle

**Définition :** Si  $f$  est continue en tout point  $a$  d'un intervalle  $I$ , on dit que  $f$  est **continue sur  $I$** .

**Théorème :** Une somme, un produit, une combinaison linéaire, une composée, un quotient (quand ils sont définis...) de fonctions continues sur un intervalle sont continues sur cet intervalle.

**Théorème :**  $f(I)$  l'image d'un intervalle  $I$  par  $f$  continue sur  $I$  est un intervalle.

**Théorème :** L'image d'un segment  $[a, b]$  par  $f$  continue sur  $[a, b]$  est un segment  $[c, d]$ .  
Une application continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

**Corollaire :** (Théorème des valeurs intermédiaires)

Si  $f$  est **continue** et change de signe entre  $a$  et  $b$ , alors, il existe  $c$  dans  $[a, b]$  tel que  $f(c) = 0$ .

## 17.5. Fonction en escalier, fonction continue par morceaux

**Définition :** Si  $f$  est définie sur  $I = [a, b]$ , avec  $a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$  et si  $f$  est constante sur tous les intervalles  $]a_{i-1}, a_i[$ , pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on dit que  $f$  est **en escalier sur I**.

**Définition :** Si  $f$  est définie sur  $I = [a, b]$ , avec  $a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$  et si  $f$  est continue sur tous les intervalles  $]a_{i-1}, a_i[$ , pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on dit que  $f$  est **continue par morceaux sur I**.

## 17.6. Limites usuelles

Les limites usuelles permettent de résoudre de nombreuses formes indéterminées.

On se reportera aussi, bien sûr, aux développements limités usuels ... pour des cas plus complexes à étudier.

a/ Limites en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

b/ Limites en  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$$

c/ Croissances comparées

Les limites suivantes sont connues sous le nom de théorème des croissances comparées.

On a ici  $\alpha$  et  $\beta$  **strictement positifs**.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln^\beta x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0$$

## 17.7. Équivalents

**Définition :** On dit que :  $f(t) \underset{t \rightarrow a}{\sim} g(t) \Leftrightarrow f(t) = g(t)(1 + \varepsilon(t))$  avec  $\lim_{t \rightarrow a} \varepsilon(t) = 0$

Ici,  $a$  est fini ou infini.

En pratique, cela revient à ce que le quotient tend vers 1.

Les équivalents ne s'ajoutent pas.

Quand on veut trouver un équivalent, le mieux est de mettre « de force » l'équivalent pressenti en facteur et de montrer que l'autre facteur tend vers 1.

On revient ainsi, sans risque, à la définition.

**Théorème :** Dans les conditions où les logarithmes sont définis :

$$f(t) \underset{t_0}{\sim} g(t) \Rightarrow \ln f(t) \underset{t_0}{\sim} \ln g(t) \quad t_0 \text{ étant fini ou infini.}$$

On peut prendre le logarithme d'équivalents.

## 17.8. Négligeabilité

**Définition :** On dit que :  $f(t) \underset{t \rightarrow a}{=} o(g(t)) \Leftrightarrow f(t) = g(t)\varepsilon(t)$  avec  $\lim_{t \rightarrow a} \varepsilon(t) = 0$ .

Ici,  $a$  est fini ou infini.

En pratique, pour une fonction  $g$  qui ne s'annule pas au voisinage de  $a$ ,

cela revient à ce que le quotient  $\frac{f(t)}{g(t)}$  tend vers 0 au point considéré.

**Définition :** On dit que :  $f(t) \underset{t \rightarrow a}{=} O(g(t)) \Leftrightarrow f(t) = g(t)h(t)$  avec  $h(t)$  borné au voisinage de  $a$ .

On utilise ceci principalement sous la forme  $o(t^n)$  ou  $O(t^n)$  dans les développements limités.

## 18. Dérivabilité

### 18.1. Dérivée, classe $\mathcal{C}^1$ et notations

**Définition :**  $f$  est **dérivable** en  $a \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  a une limite finie quand  $x$  tend vers  $a$ .

**Notation :** Cette dérivée en  $a$  est notée  $f'(a)$  ou  $Df(a)$  ou encore  $\frac{df}{dx}(a)$ .

**Théorème :**  $f$  dérivable en  $a \Rightarrow f$  est continue en  $a$ . La réciproque est fausse !

**Définition :**  $f$  est **dérivable** sur  $I \Leftrightarrow f$  est dérivable en tout point  $a \in I$ .  
Si, de plus, la fonction dérivée est continue sur  $I$ , on dit que  $f$  est de **Classe**  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .

**Notation :** Cette fonction dérivée sur  $I$  est notée  $f'$ , ou  $Df$ , ou encore  $\frac{df}{dx}$ .

### 18.2. Classe $\mathcal{C}^n$

**Définition :**  
 $f$  est de **classe**  $\mathcal{C}^n$  sur  $I \Leftrightarrow f$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$ , la dérivée  $n^{\text{ème}}$  étant, de plus, continue sur  $I$ .

**Notation :** Cette fonction dérivée  $n^{\text{ème}}$  sur  $I$  est notée  $f^{(n)}$  ou  $D^n f$  ou encore  $\frac{d^n f}{dx^n}$ .

### 18.3. Application de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $[a, b]$

**Définition :**  $f$  définie sur  $[a, b]$ , à valeur dans  $\mathbb{R}$ .

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  par morceaux sur  $[a, b]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{il existe } a_0, a_1, \dots, a_n \text{ tels que } a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b \text{ et tels que} \\ \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad f \text{ de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } ]a_{i-1}, a_i[ \\ \text{prolongeable par continuité sur } [a_{i-1}, a_i] \text{ avec } f_i = \overline{f|_{]a_{i-1}, a_i[}} \text{ la prolongée de classe } \mathcal{C}^k \end{cases}$$

La figure 4, page ci-contre, représente une fonction discontinue et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $[a, b]$ .

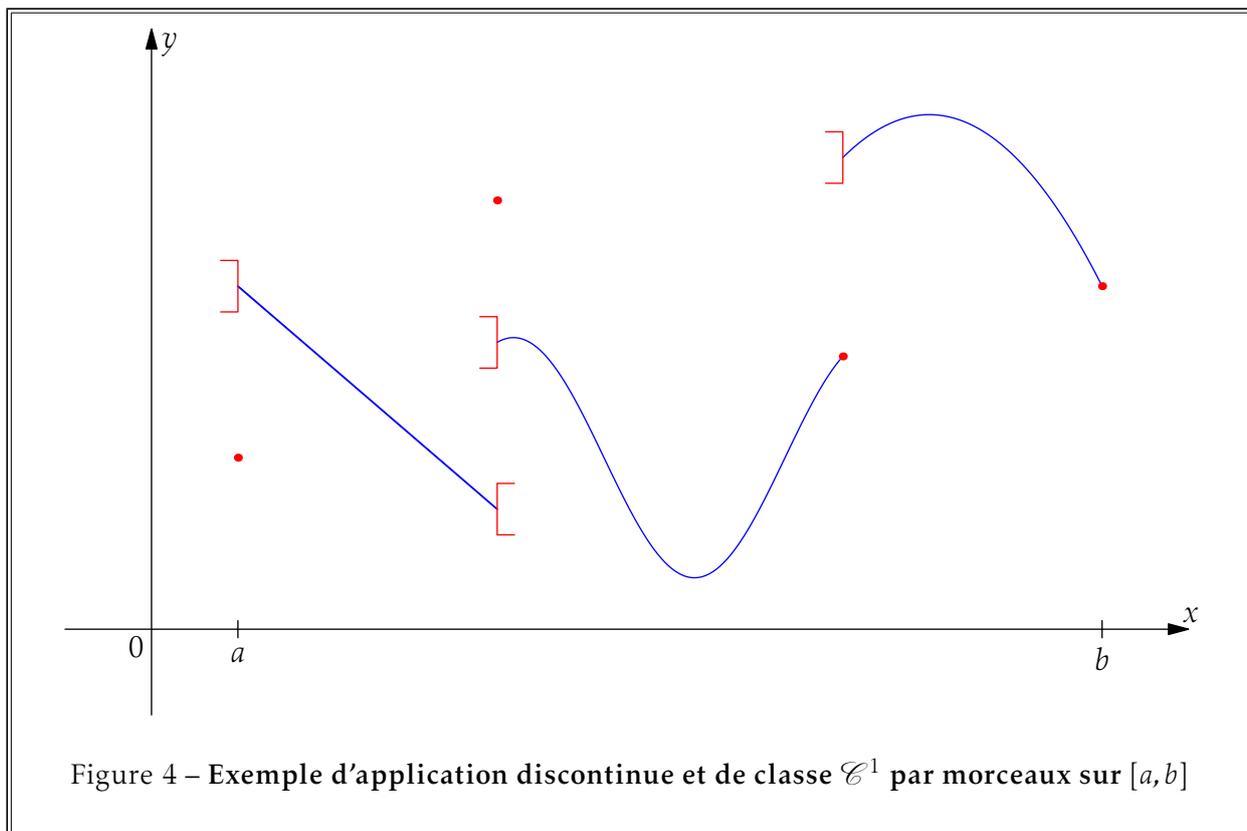
### 18.4. Sommes et produits de fonctions dérivables

**Théorème :**  $f$  et  $g$  dérivables en un point ou sur un intervalle  $\Rightarrow \begin{cases} (f + g)' = f' + g' \\ (f \times g)' = f' \times g + f \times g' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2} \end{cases}$

En se plaçant pour cette dernière propriété en un point où  $g$  est non nulle.

**Théorème :** Si  $f$  et  $g$  sont  $n$  fois dérivables :  $(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$

Ceci s'utilise surtout avec une des deux fonctions qui est un polynôme, une exponentielle ou une fonction trigonométrique.



### 18.5. Dérivée d'une fonction composée

**Théorème :**  $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$  c'est à dire :  $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \times f'(x)$

**Théorème :** En un point où  $f'$  est non nulle :  $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$  c'est à dire :  $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$  avec les notations habituelles  $y = f(x)$ .

### 18.6. Dérivée et prolongement par continuité

Pour étudier la dérivabilité d'une fonction en un point où elle a été prolongée par continuité, on peut

- ou calculer la limite de  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  qui permet d'obtenir la dérivabilité mais ne prouve pas la classe  $\mathcal{C}^1$
- ou bien calculer la limite de  $f'(x)$ 
  - quand cette limite existe et est finie,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ ,
  - quand cette limite est infinie,  $f$  n'est pas dérivable au point,
  - mais s'il n'y a pas de limite, on ne prouve rien...

### 18.7. Théorème de Rolle et des Accroissements Finis, Formules de Taylor

**Théorème :** (Rolle)

$f$  continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ ,  $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in ]a, b[$ , tel que :  $f'(c) = 0$

**Théorème :** (Egalité des accroissements finis)

$f$  continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ ,  $\Rightarrow \exists c \in ]a, b[$ , tel que :  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

**Théorème :** (Inégalité des accroissements finis)

$f$  continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ , de dérivée bornée  $\Rightarrow \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| \leq \sup_{c \in ]a, b[} |f'(c)|$

On n'écrira ici que les formules de Taylor en 0 ou sur l'intervalle  $[0, x]$ , sauf pour la formule de Taylor-Young.

On peut se placer en un point  $a$  ou sur  $[a, b]$ , en adaptant les notations.

**Théorème :** (Taylor-Young)

Si  $f$  est  $n$ -fois dérivable au voisinage de 0 :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + o(x^n) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0$$

**Théorème :** (Taylor-Young)

Si  $f$  est  $n$ -fois dérivable au voisinage de  $x_0$  :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0)$$

$$\text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x-x_0) = 0$$

**Théorème :** (Taylor avec reste intégral)

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur l'intervalle :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) dt$$

**Théorème :** (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur l'intervalle :

$$\left| f(x) - \left( f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) \right) \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [0, x]} |f^{(n+1)}(t)|$$

## 18.8. Zéros d'une fonction

Une fonction continue qui change de signe sur un intervalle s'annule au moins une fois, d'après le théorème des valeurs intermédiaires. On appelle les valeurs de  $x$  telles que  $f(x) = 0$  les **zéros** de la fonction.

Si on ne sait pas calculer les valeurs exactes de ces zéros, on en calcule des valeurs approchées par des méthodes itératives.

### a/ Recherche d'un zéro d'une fonction par dichotomie

**Théorème :** Soit  $f$  continue et strictement monotone sur  $[a, b]$  telle  $f(a)f(b) < 0$ , c'est à dire  $f(a)$  et  $f(b)$  de signes différents, alors, il existe un **unique**  $c \in ]a, b[$  tel que :  $f(c) = 0$ .

Pour trouver une valeur approchée de ce zéro, on calcule le signe de  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ .

On continue en remplaçant  $[a, b]$  par :

- $\left[ a, \frac{a+b}{2} \right]$  si  $f(a)$  et  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  sont de signes différents ;
- $\left[ \frac{a+b}{2}, b \right]$  si  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  et  $f(b)$  sont de signes différents.

Ainsi,  $c$  est toujours dans l'intervalle considéré et on a une valeur approchée de  $c$  à  $\varepsilon$  près dès que la longueur de l'intervalle est inférieure à  $\varepsilon$ .

Comme la longueur de cet intervalle est divisée par 2 à chaque étape, la convergence est rapide.

### b/ Théorème de Newton-Raphson

**Théorème :** Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[a, b]$ ,  $a < b$ , avec  $f(a)$  et  $f(b)$  de signes différents,  $f'$  et  $f''$  qui ne s'annulent pas sur  $]a, b[$ ,

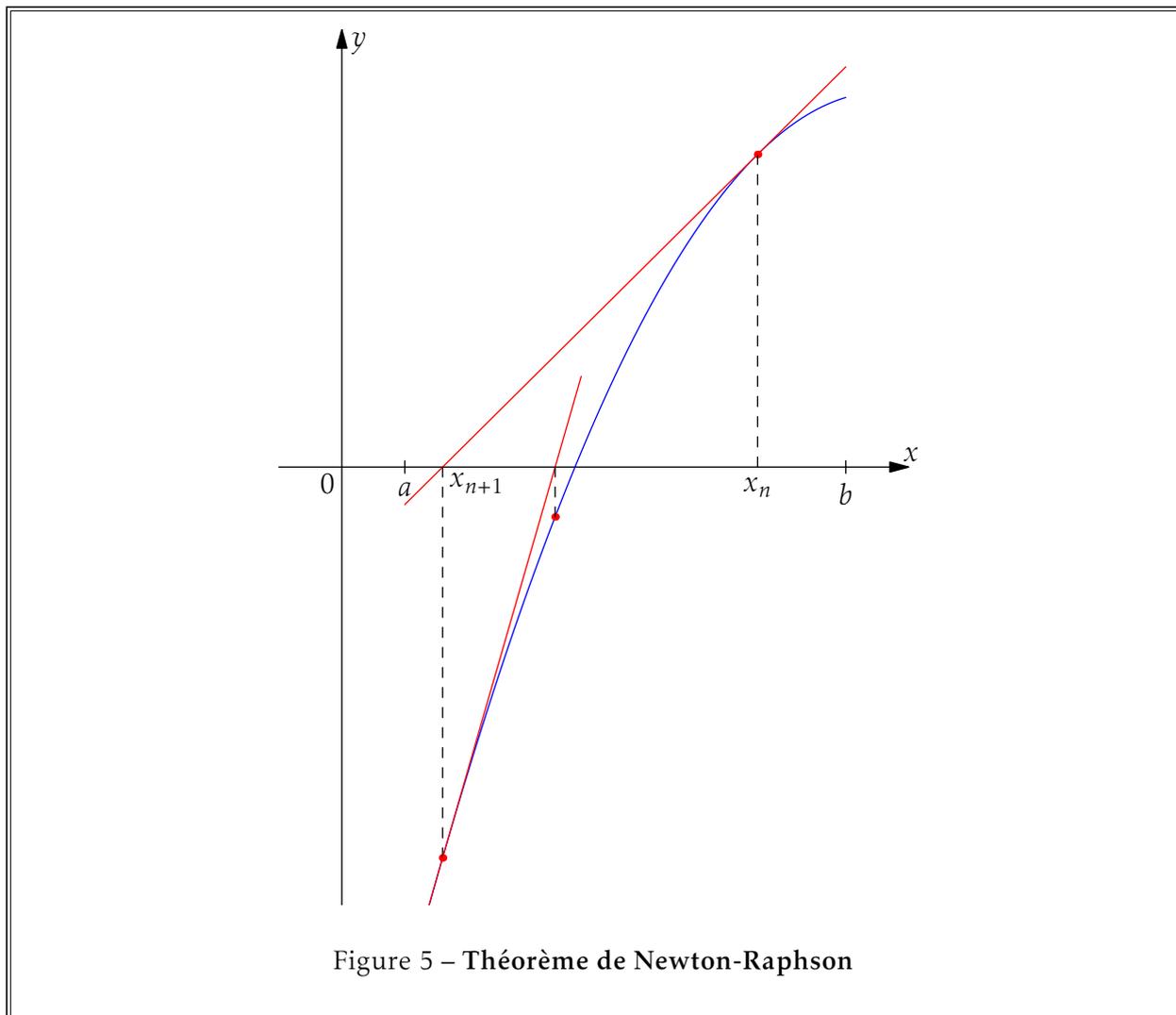
$x_0$  tel que  $f(x_0)f''(x_0) \geq 0$ , alors  $f$  possède un unique zéro dans  $[a, b]$ , limite de la suite  $(x_n)$  définie par :

$$x_0 = a \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

La convergence de la suite est plus rapide que par dichotomie.

On peut choisir  $x_0 = a$ , ou  $x_0 = b$ , le mieux est de regarder le graphe de  $f$  sur  $[a, b]$ .

On obtient  $x_{n+1}$  par intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe au point d'abscisse  $x_n$ , comme on peut le voir sur le graphe 5, ci-dessous.



### 18.9. Développements limités

On n'écrira ici que des développements limités en 0. on peut se placer en un point  $a$  en adaptant les notations.

**Définition :** On dit que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0

$$\Leftrightarrow \text{il existe } a_0, a_1, \dots, a_n \text{ tels que } f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$$

$f$  admet un  $dl_0$  en 0  $\Leftrightarrow f$  est continue en 0

$f$  admet un  $dl_1$  en 0  $\Leftrightarrow f$  est dérivable en 0. (mais on ne peut pas généraliser à un  $dl_n \dots$ )

**Théorème :**  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  en 0  $\Rightarrow f$  admet un  $dl_n$  en 0, qui est le développement de Taylor !

### 18.10. Opérations sur les $dl_n$

On agira toujours avec des développements au même ordre.

- Somme : ajouter simplement les parties régulières.

- Produit : faire le produit des parties régulières et tronquer à l'ordre  $n$ .
- Quotient : se ramener à  $k \frac{f(x)}{1+u(x)}$ , avec  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$ , et utiliser  $\frac{1}{1+u} = 1 - u + \dots + (-1)^n u^n + o(u^n)$
- Composée : pour  $g \circ f$ , vérifier que  $f(0) = 0$ , faire la composée des parties régulières et tronquer à l'ordre  $n$ .
- On obtient un  $dl_{n+1}$  de la primitive de  $f$  en intégrant terme à terme le  $dl_n$  de  $f$ .  
Attention aux constantes d'intégration... On ne peut pas faire la même chose pour la dérivée !

## 19. Fonctions usuelles

### 19.1. Exponentielle et Logarithme

- La fonction **exponentielle** :  $x \mapsto \exp(x) = e^x$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , croissante. On peut aussi la définir sur  $\mathbb{C}$ .

Sa dérivée est elle même :  $x \mapsto \exp(x)$

Elle vérifie la propriété fondamentale :  $\forall a, b \in \mathbb{R}, \exp(a+b) = \exp(a) \exp(b)$ .

Cette propriété est d'ailleurs encore vérifiée sur  $\mathbb{C}$ .

Sur  $\mathbb{R}$ , le tableau de variation est :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$\exp(x)$		1	$+\infty$
	0		

- La fonction **logarithme** est la réciproque de la précédente et n'est définie que sur  $\mathbb{R}_+^*$ , croissante.

Sa dérivée est :  $x \mapsto \frac{1}{x}$

Elle vérifie la propriété fondamentale :  $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^* \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ .

Le tableau de variation est :

$x$	$0$	$1$	$+\infty$
$\ln(x)$		0	$+\infty$
	$-\infty$		

Ces deux fonctions sont tracées sur la figure 6, page ci-contre.

### 19.2. Fonctions trigonométriques circulaires

- La fonction **sinus**,  $x \mapsto \sin(x)$ , est définie sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$  périodique, impaire ;

Sa dérivée est :  $x \mapsto \cos(x)$

Le tableau de variation est :

$x$	$-\pi$	$-\pi/2$	$0$	$\pi/2$	$\pi$
$\sin(x)$			0	1	0
	0	$-1$			0

- La fonction **cosinus**,  $x \mapsto \cos(x)$ , est définie sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$  périodique, paire ;

Sa dérivée est :  $x \mapsto -\sin(x)$

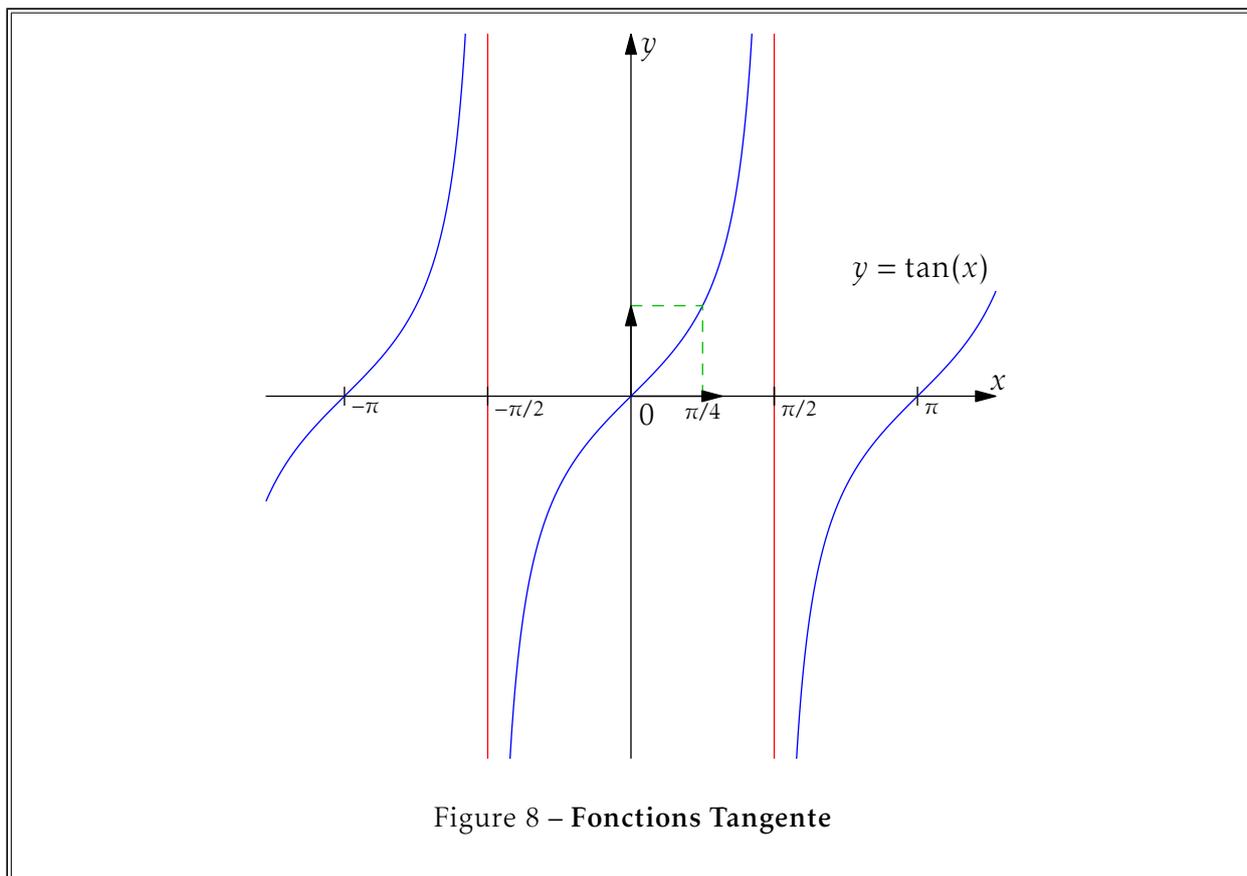
Le tableau de variation est :

$x$	$-\pi$	$-\pi/2$	$0$	$\pi/2$	$\pi$
$\cos(x)$			1	0	$-1$
	$-1$				0

- La fonction **tangente**,  $x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ , est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\pi$  périodique, impaire ;

Sa dérivée est :  $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$





Le tableau de variation est :

$x$	-1	0	1
arcsin( $x$ )		0	$\frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2}$  ↗ ↘  $\frac{\pi}{2}$

- La fonction **arccosinus**,  $x \mapsto \arccos(x)$ , est définie sur  $[-1, 1]$ , décroissante ;

Sa dérivée est :  $x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Le tableau de variation est :

$x$	-1	0	1
arccos( $x$ )	$\pi$	$\frac{\pi}{2}$	0

↘ ↘ ↘

- La fonction **arctangente**,  $x \mapsto \arctan(x)$ , est définie sur  $\mathbb{R}$ , impaire, croissante ;

Sa dérivée est :  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

Le tableau de variation est :

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
arctan( $x$ )		0	$\frac{\pi}{2}$

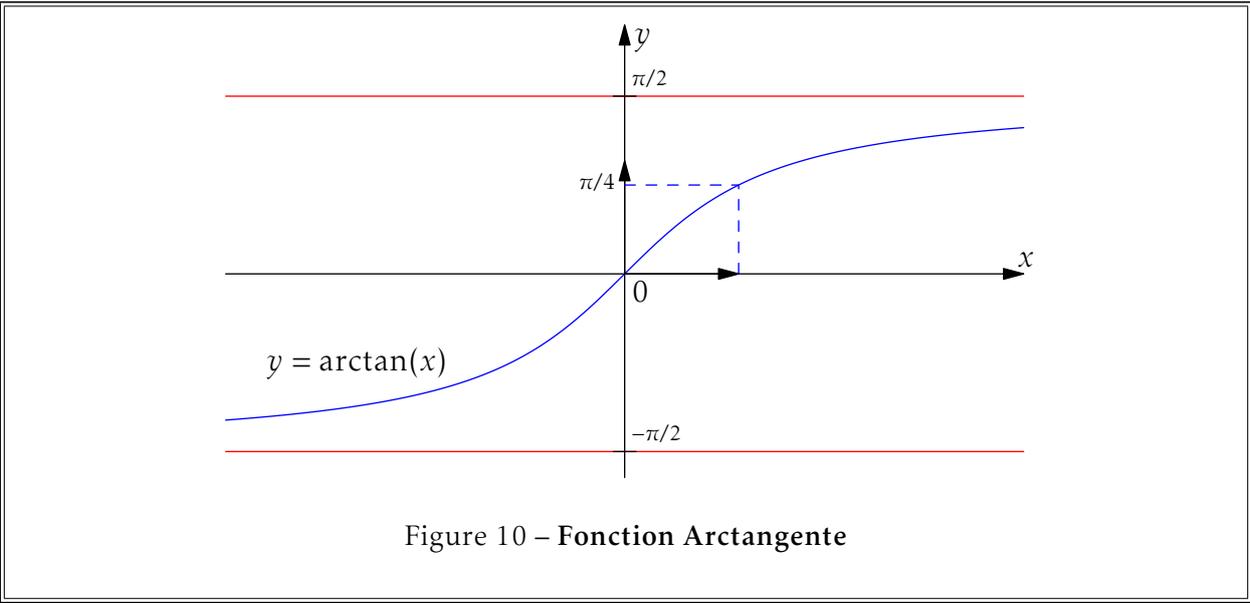
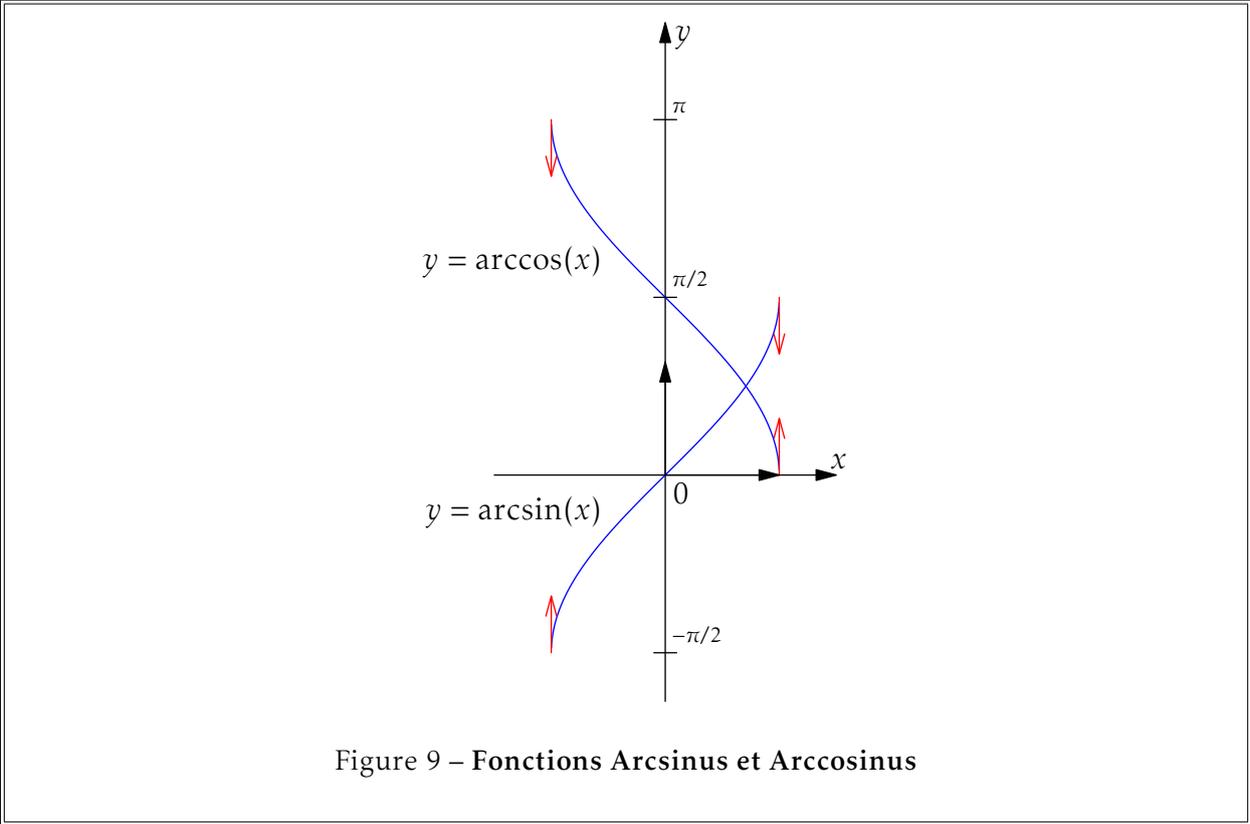
$-\frac{\pi}{2}$  ↗ ↘  $\frac{\pi}{2}$

On a illustré les fonctions Arcsinus et Arccosinus dans la figure 9, page suivante.

On a illustré la fonction Arctangente dans la figure 10, page ci-contre.

Il faut se méfier des touches des calculatrices qui notent par exemple «  $\tan^{-1}$  » l'application **réci-proque** de l'application «  $\tan$  », c'est à dire l'application «  $\arctan$  »...

Cela provient de ce que l'application « réci-proque » est l'application « inverse » pour la composée des applications...



19.4. Fonctions trigonométriques hyperboliques

- La fonction **sinus hyperbolique**,  $x \mapsto \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ , est définie sur  $\mathbb{R}$ , impaire, croissante ;  
Sa dérivée est :  $x \mapsto \text{ch}(x)$

Le tableau de variation est :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$\text{sh}(x)$	$-\infty$	$0$	$+\infty$

- La fonction **cosinus hyperbolique**,  $x \mapsto \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ , est définie sur  $\mathbb{R}$ , paire ;  
Sa dérivée est :  $x \mapsto \text{sh}(x)$

Le tableau de variation est :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$\text{ch}(x)$	$+\infty$	$1$	$+\infty$

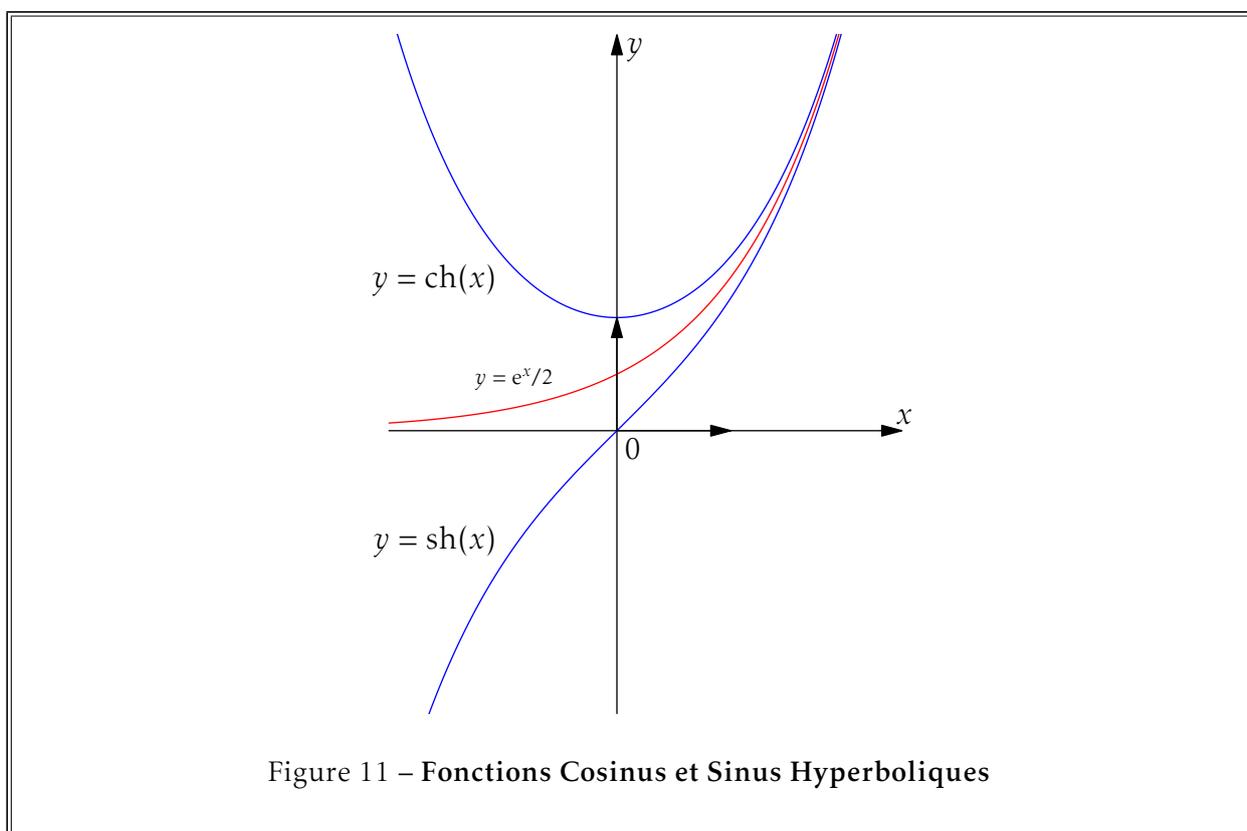
- La fonction **tangente hyperbolique**,  $x \mapsto \text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ , est définie sur  $] -1, 1[$ , impaire, croissante ;

Sa dérivée est :  $x \mapsto \frac{1}{\text{ch}^2(x)} = 1 - \text{th}^2(x)$

Le tableau de variation est :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$\text{th}(x)$	$-1$	$0$	$+1$

Rappelons la relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique :  $\text{ch}^2 a - \text{sh}^2 a = 1$   
 Les deux fonctions  $x \rightarrow \text{ch}(x)$  et  $x \rightarrow \text{sh}(x)$  sont tracées sur la figure 11, de la présente page.



La fonction  $x \rightarrow \text{th}(x)$  est représentée sur la figure 12, page ci-contre.

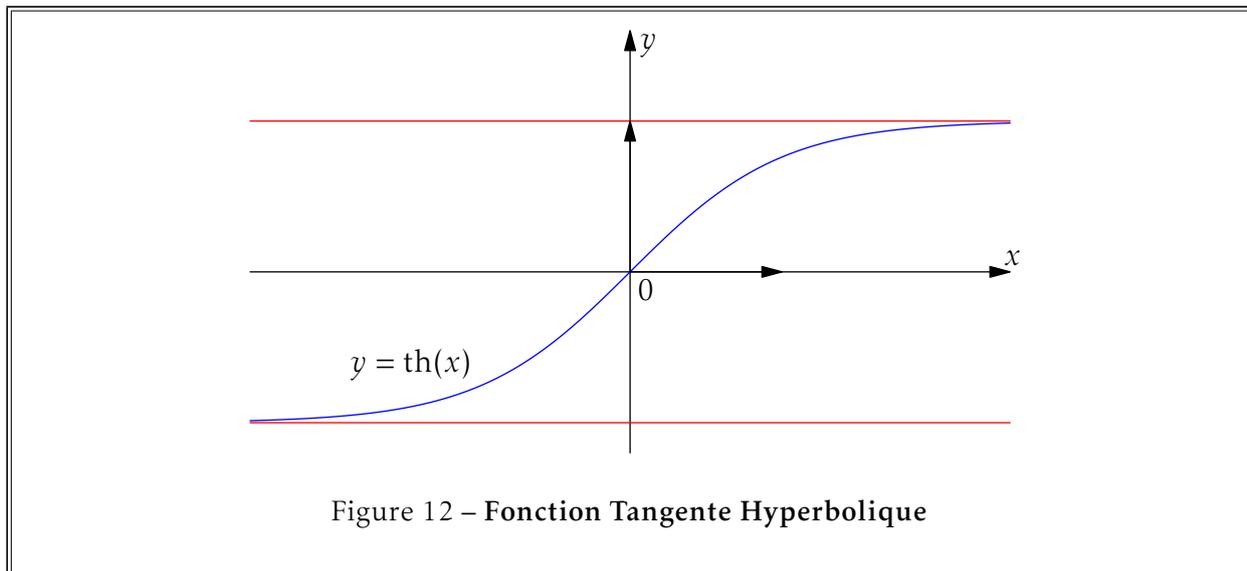
### 19.5. Fonctions trigonométriques hyperboliques réciproques

- La fonction **argument sinus hyperbolique**,  $x \mapsto \text{Argsh}(x)$ , est définie sur  $\mathbb{R}$ , impaire, croissante ;

Sa dérivée est :  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Le tableau de variation est :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$\text{Argsh}(x)$	$-\infty$	$0$	$+\infty$



- La fonction **argument cosinus hyperbolique**,  $x \rightarrow \text{Argch}(x)$ , est définie sur  $[1, +\infty[$ , croissante ;  
Sa dérivée est :  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Le tableau de variation est :

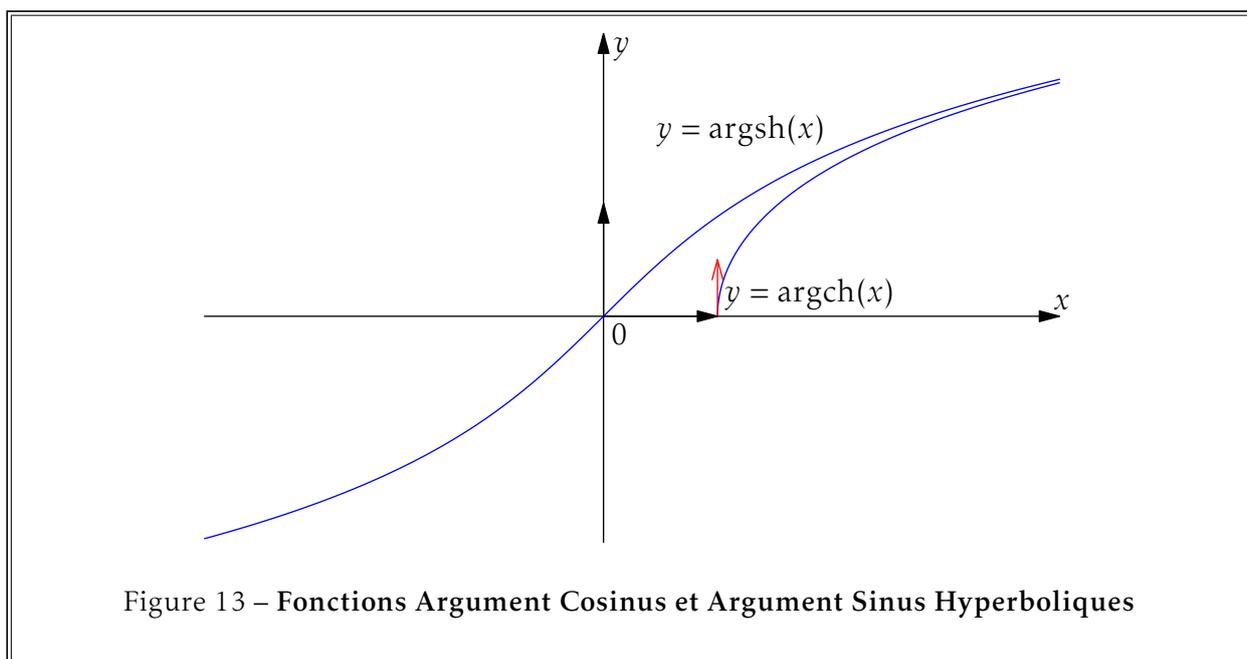
$x$	1	$+\infty$
$\text{Argch}(x)$	0	$\nearrow +\infty$

- La fonction **argument tangente hyperbolique**,  $x \rightarrow \text{Argth}(x)$ , est définie sur  $] -1, 1[$ , impaire, croissante ;  
Sa dérivée est :  $x \mapsto \frac{1}{1 - x^2}$

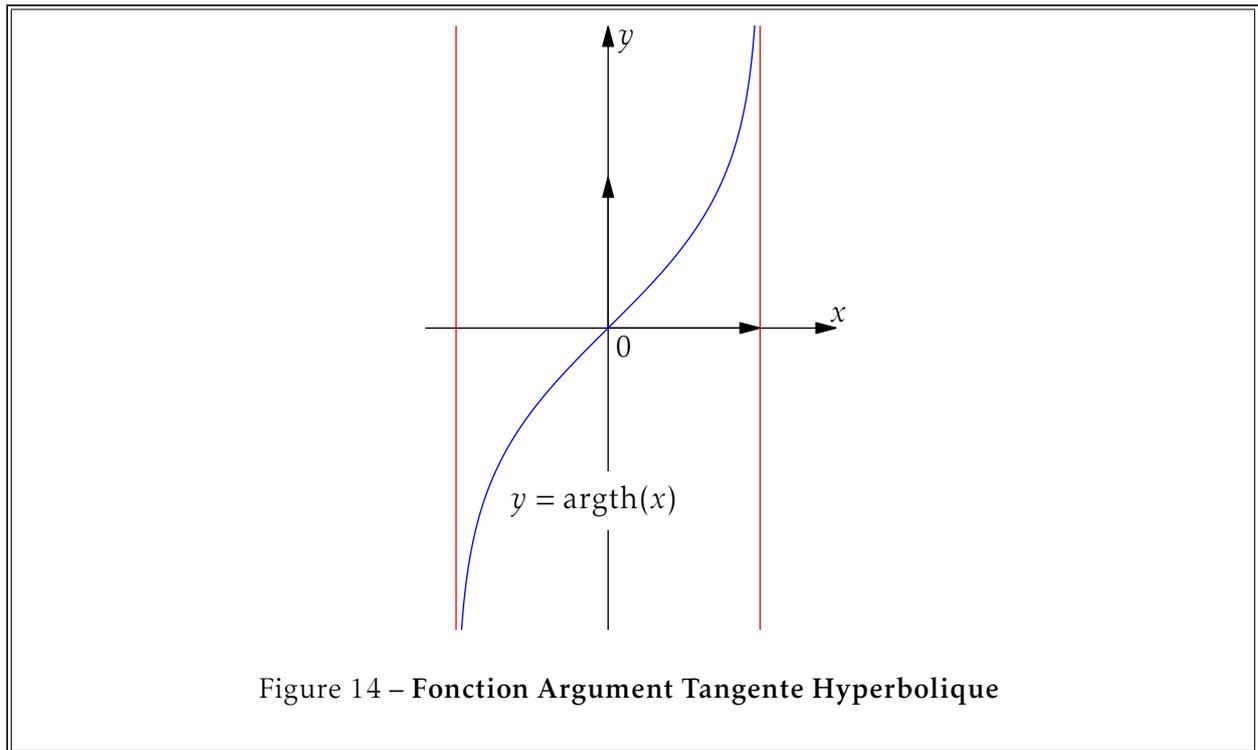
Le tableau de variation est :

$x$	$-1$	0	$+1$
$\text{Argth}(x)$	$-\infty$	0	$\nearrow +\infty$

Les deux fonctions  $x \rightarrow \text{Argch}(x)$  et  $x \rightarrow \text{Argsh}(x)$  sont tracées sur la figure 13, ci-dessous.



La fonction  $x \rightarrow \operatorname{Argth}(x)$  est représentée sur la figure 14, ci-dessous.



### 19.6. Autres fonctions usuelles

Voir le tableau 1, page suivante, des dérivées et des développements limités usuels.

On ajoutera la dérivée  $n^{\text{ème}}$  de  $\sin x$  qui est :  $\sin(x + n\frac{\pi}{2})$ , et celle de  $\cos x$  qui est :  $\cos(x + n\frac{\pi}{2})$ .

On a indiqué l'ensemble de définition de  $f'$  quand il diffère de celui de  $f$ .

Pour les deux dernières qui dépendent d'un paramètre  $a$ , on a indiqué les résultats valables pour  $a$  quelconque.

Tableau 1 – FONCTIONS USUELLES

$f$	$D_f$	$f'$	$dl_n$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
$\tan x$	$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (]-1, 1[)$	$x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (]-1, 1[)$	$\frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} + o(x^{2n+2})$
$e^x$	$\mathbb{R}$	$e^x$	$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
$\ln x$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{x}$	
$\ln(1+x)$	$] -1, +\infty[$	$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x}$	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$		$\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$
$\ln(1-x)$	$] -\infty, +1[$	$-\frac{1}{1-x}$	$-\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$		$\sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$
$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh} x$	$\sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch} x$	$\sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$	$x + o(x^2)$
$\operatorname{Argch} x$	$[1, +\infty[$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	
$\operatorname{Argsh} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	
$\operatorname{Argth} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1-x^2}$	
$x^a$	$]0, +\infty[$ ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$	$a x^{a-1} (a \neq 0)$	
$(1+x)^a$	$] -1, +\infty[, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$a(1+x)^{a-1}$	$1 + \sum_{k=1}^n \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$

## 20. Trigonométrie

### 20.1. Propriétés élémentaires

Rappelons la relation fondamentale de la trigonométrie :  $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ .  
La figure 15, ci-dessous, représente le cercle trigonométrique.

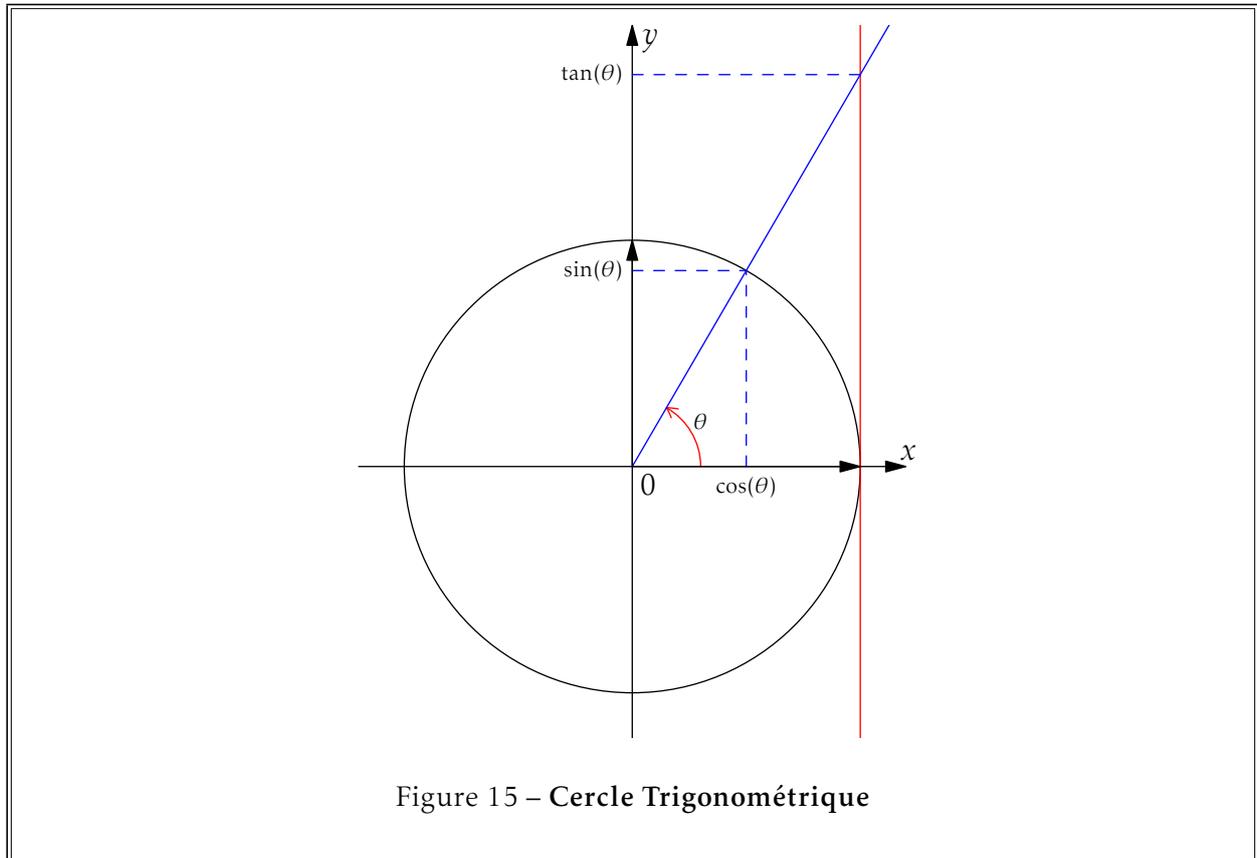


Figure 15 – Cercle Trigonométrique

Les valeurs des lignes trigonométriques à connaître sont :

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$

### 20.2. Symétries

$$\begin{array}{lll}
 \sin(-x) = -\sin x & \cos(-x) = \cos x & \tan(-x) = -\tan x \\
 \sin(x + \pi) = -\sin x & \cos(x + \pi) = -\cos x & \tan(x + \pi) = \tan x \\
 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x & \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x} \\
 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x & \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x & \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan x} \\
 \sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin x & \cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos x & \tan(x + n\pi) = \tan x
 \end{array}$$

### 20.3. Arc double

$$\cos 2a = \begin{cases} \cos^2 a - \sin^2 a \\ 2 \cos^2 a - 1 \\ 1 - 2 \sin^2 a \end{cases} \quad \sin 2a = 2 \sin a \cos a \quad \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \quad \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

### 20.4. Sommes d'arcs

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a & \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a & \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} & \tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \end{aligned}$$

Notons le cas particulier :  $\frac{1 + \tan a}{1 - \tan a} = \tan\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$ .

### 20.5. Transformation de produits en sommes

$$\begin{aligned} \cos a \cos b &= \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} & \sin a \sin b &= \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2} \\ \sin a \cos b &= \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2} \end{aligned}$$

### 20.6. Transformation de sommes en produits

$$\begin{aligned} \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} & \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} & \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \\ \tan p + \tan q &= \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q} \end{aligned}$$

### 20.7. Formule de Moivre

$$(\cos a + i \sin a)^n = (e^{ia})^n = e^{ina} = \cos na + i \sin na$$

### 20.8. Fonctions réciproques

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \quad \arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2} \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

### 20.9. Pour le calcul intégral

$$\text{Si } t = \tan \frac{\theta}{2}, \text{ alors : } \tan \theta = \frac{2t}{1-t^2} \quad ; \quad \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad d\theta = \frac{2 dt}{1+t^2}$$

## 21. Recherche de primitives

### 21.1. Fraction rationnelle en $x$

L'énoncé nous guide pour transformer au besoin la fraction rationnelle :

- les termes en  $\frac{P'(x)}{P(x)}$ , s'intègrent en :  $\ln|P(x)|$
- les termes en  $\frac{P'(x)}{P(x)^p}$ , s'intègrent en :  $\frac{1}{1-p} \times \frac{1}{P(x)^{p-1}}$
- les termes en  $\frac{1}{x-a}$ , s'intègrent en  $\ln|x-a|$
- les termes en  $\frac{1}{(x-a)^p}$ , s'intègrent en :  $\frac{1}{1-p} \times \frac{1}{(x-a)^{p-1}}$
- les termes en  $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$ , avec  $\Delta < 0$ , s'intègrent en écrivant :  $\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{\frac{a}{2} \times (2x+p)}{x^2+px+q} + \frac{(b-\frac{a}{2}p)}{x^2+px+q}$ 
  - en  $\ln(x^2+px+q)$  pour le terme :  $\frac{\frac{a}{2} \times (2x+p)}{x^2+px+q}$ , et ensuite,
  - en arctan pour le nouveau terme constant :  $\frac{(b-\frac{a}{2}p)}{x^2+px+q}$ .

### 21.2. Fractions rationnelles diverses

Dans tous les cas, on indique un changement de variable, du type  $u = \dots$ , qui permet d'obtenir une fraction rationnelle en  $u$ .

a/ Fraction rationnelle en  $e^x$ ,  $\operatorname{ch} x$ ,  $\operatorname{sh} x$

Poser  $u = e^x$ .

b/ Fraction rationnelle en  $x$  et  $\sqrt{ax+b}$

Poser  $u = \sqrt{ax+b}$ .

c/ Fraction rationnelle en  $\sin x$  et  $\cos x$

Règle de Bioche : on regarde si  $f(x)dx$  est invariant quand on change

- $x$  en  $-x$ , poser alors :  $u = \cos x$ ,
- $x$  en  $\pi - x$ , poser alors :  $u = \sin x$ ,
- $x$  en  $\pi + x$ , poser alors :  $u = \tan x$ ,

en cas d'échec, poser  $u = \tan \frac{x}{2}$ . Voir à ce propos les formules nécessaires au paragraphe 20.9..

Attention, c'est bien l'élément différentiel «  $f(x)dx$  » qui doit être invariant.

### 21.3. Polynôme $\times$ exponentielle

On peut :

- Intégrer par parties en diminuant le degré du polynôme ou,
- chercher une primitive de la même forme avec un polynôme du même degré.

### 21.4. Primitives usuelles

Voir le tableau 2, page 50, des primitives usuelles.

Notons qu'une primitive n'a de sens que sur un **intervalle**. Si on change d'intervalle, il y a au moins la constante qui change, mais pas seulement. En effet  $\ln(x)$  peut devoir être changé en  $\ln(-x)$  quand on travaille sur  $\mathbb{R}_-^*$ ...

C'est pourquoi, dans un premier temps, dans un calcul de primitive, on écrira **toujours** un logarithme avec une valeur absolue.

## 22. Intégrale de Riemann (ou intégrale simple)

### 22.1. Primitive

**Théorème :** (Darboux)

Une fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle. Deux primitives diffèrent d'une constante.

**Définition :**  $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ , avec  $F$  une primitive de  $f$ .

Dans un repère orthonormal, l'intégrale  $\int_a^b f(t)dt$  est aussi l'aire **algébrique** délimitée par la courbe et l'axe  $Ot$  de la variable entre  $t = a$  et  $t = b$ .

**Théorème :** (Chasles)

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt, \text{ avec } f \text{ continue sur la réunion des intervalles.}$$

**Théorème :** (Linéarité)

$$\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$$

### 22.2. Interprétation géométrique

L'intégrale simple sur  $[a, b]$  de  $f$  est l'aire **algébrique** entre le graphe de  $f$  et l'axe des abscisses.

- Quand la fonction est positive, comme sur la figure 16, ci-dessous, l'aire algébrique se confond avec l'aire géométrique, c'est à dire l'aire hachurée.

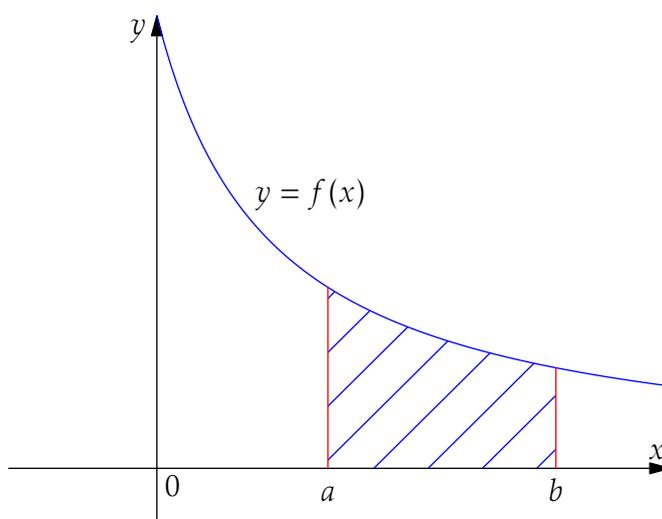
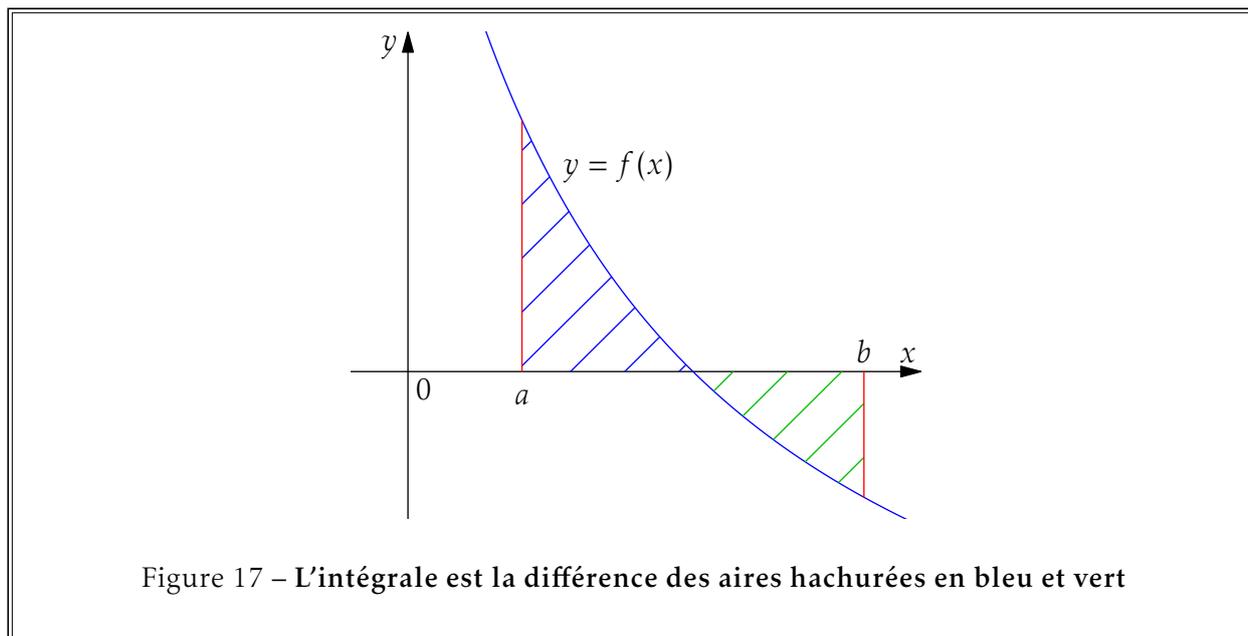


Figure 16 – L'intégrale simple d'une fonction positive est l'aire hachurée

Tableau 2 – PRIMITIVES USUELLES

Primitives simples		
Fonction	Primitive	Remarques
$x^a$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$	Sauf pour $a = -1$ , sur $\mathbb{R}$ , ou $\mathbb{R}^*$ , ou $\mathbb{R}_+^*$ selon le cas
$\frac{1}{x}$	$\ln x  + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^a}$	$\frac{1}{1-a} \frac{1}{x^{a-1}} + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}^*$ , sauf pour $a = 1$
$\frac{1}{x+a}$	$\ln x+a  + C$	Sur un intervalle ne contenant pas $-a$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	Sur un intervalle de $] -1, 1[$ . Ou bien $-\arccos x + C'$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{Argch} x + C$	Sur un intervalle de $[1, +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{Argsh} x + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$e^x$	$e^x + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	Sur un intervalle de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\tan x$	$-\ln \cos x  + C$	Sur un intervalle de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$	$\ln(\operatorname{ch} x) + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
Utilisation de fonctions composées		
Fonction	Primitive	Remarques
$u' u^n$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + C$	Sur un intervalle où $u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ , $n \neq -1$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u  + C$	Sur un intervalle où $u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ , $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u^n}$	$\frac{1}{1-n} \frac{1}{u^{n-1}} + C$	Sur un intervalle où $u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ , $u(x) \neq 0$ , $n \neq 1$
$\frac{u'}{a^2+u^2}$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$	Sur un intervalle où $u$ est de classe $\mathcal{C}^1$

- Quand la fonction est de signe variable, comme sur la figure 17, ci-dessous, l'aire algébrique est la différence des aires géométriques au dessus et en dessous de l'axe des abscisses, c'est à dire des aires hachurées.



### 22.3. Inégalités

**Théorème :**  $\left. \begin{array}{l} \forall t \in [a, b], \quad f(t) \leq g(t) \\ a < b \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$

**Théorème :** (Valeur absolue ou module)

$$a < b \Rightarrow \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

**Théorème :** (Moyenne)

$$a < b \Rightarrow \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq (b - a) \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$$

**Théorème :** (Cauchy-Schwarz, cas réel)

$$a < b \Rightarrow \left( \int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \int_a^b f^2(t) dt \times \int_a^b g^2(t) dt$$

**Théorème :** (Cauchy-Schwarz, cas complexe)

$$a < b \Rightarrow \left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right|^2 \leq \int_a^b |f^2(t)| dt \times \int_a^b |g^2(t)| dt$$

### 22.4. Théorème des 3 conditions

**Théorème :**  $\left. \begin{array}{l} \forall t \in [a, b], \quad f(t) \geq 0 \\ f \text{ continue sur } [a, b] \\ \int_a^b f(t) dt = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \forall t \in [a, b], \quad f(t) = 0$

On utilise souvent ce théorème quand on a un produit scalaire défini par une intégrale, pour montrer le caractère défini-positif de la forme quadratique.

## 22.5. Intégrale dépendant d'une borne

- Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , alors  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ , et  $F'(x) = f(x)$
- Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , et si  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[\alpha, \beta]$ , avec  $\begin{cases} u([\alpha, \beta]) \subset [a, b] \\ v([\alpha, \beta]) \subset [a, b] \end{cases}$   
alors  $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[\alpha, \beta]$ ,  $F'(x) = f(v(x)) \times v'(x) - f(u(x)) \times u'(x)$

On ne confondra pas ce théorème avec les suivants...

## 22.6. Continuité et dérivation sous $\int \dots$ pour une intégrale simple

**Théorème :** (Continuité)

$$f : \begin{matrix} I \times [a, b] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & f(x, t) \end{matrix} \left. \vphantom{f} \right\} \text{ avec } f \text{ continue sur } I \times [a, b]$$

$$\Rightarrow F \text{ définie par } F(x) = \int_a^b f(x, t) dt \text{ est continue sur } I$$

**Théorème :** (Classe  $\mathcal{C}^1$ )

Si, **de plus**,  $f$  admet une dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ , continue sur  $I \times [a, b]$ ,  
 $\Rightarrow F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , et,  $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$

## 22.7. Intégration par parties et changement de variable pour une intégrale simple

- Intégration par parties :  $u$  et  $v$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ ,

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = \left[ u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$$

- Changement de variable :  $f$  continue sur  $[a, b]$ ,  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[\alpha, \beta]$ , avec  $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$ ,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u) du$$

Le changement de variable est donc  $u = \varphi(t)$  dont on vérifiera qu'il est bien de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle de variation de  $t$ .

## 22.8. Calcul approché d'intégrales et sommes de Riemann

On va faire un calcul approché de la valeur d'une intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  en divisant l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  parties égales.

Les bornes de ces parties sont donc :  $a + k \frac{b-a}{n}$ , pour  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Sur chacun de ces intervalles de largeur  $\frac{b-a}{n}$ , qui sont :  $\left[ a + (k-1) \frac{b-a}{n}, a + k \frac{b-a}{n} \right]$ , on approxime la fonction par la valeur à une de ses deux bornes.

Ce qui donne :

**Théorème :**  $f$  continue sur  $[a, b]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$$

Si de plus  $f$  est monotone, une figure montre facilement que l'une des deux sommes est un majorant, l'autre un minorant de l'intégrale.

Enfin, quand  $[a, b] = [0, 1]$ , on obtient des sommes particulières appelées sommes de Riemann :

**Théorème :**  $f$  continue sur  $[0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt$$

## 23. Intégrale généralisée (ou intégrale impropre)

### 23.1. Convergence

**Définition :**  $f$  est localement intégrable sur  $I \Leftrightarrow f$  est continue par morceaux sur  $I$

**Définition :**  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , continue sur  $[a, b[$  admet une intégrale généralisée en  $b$

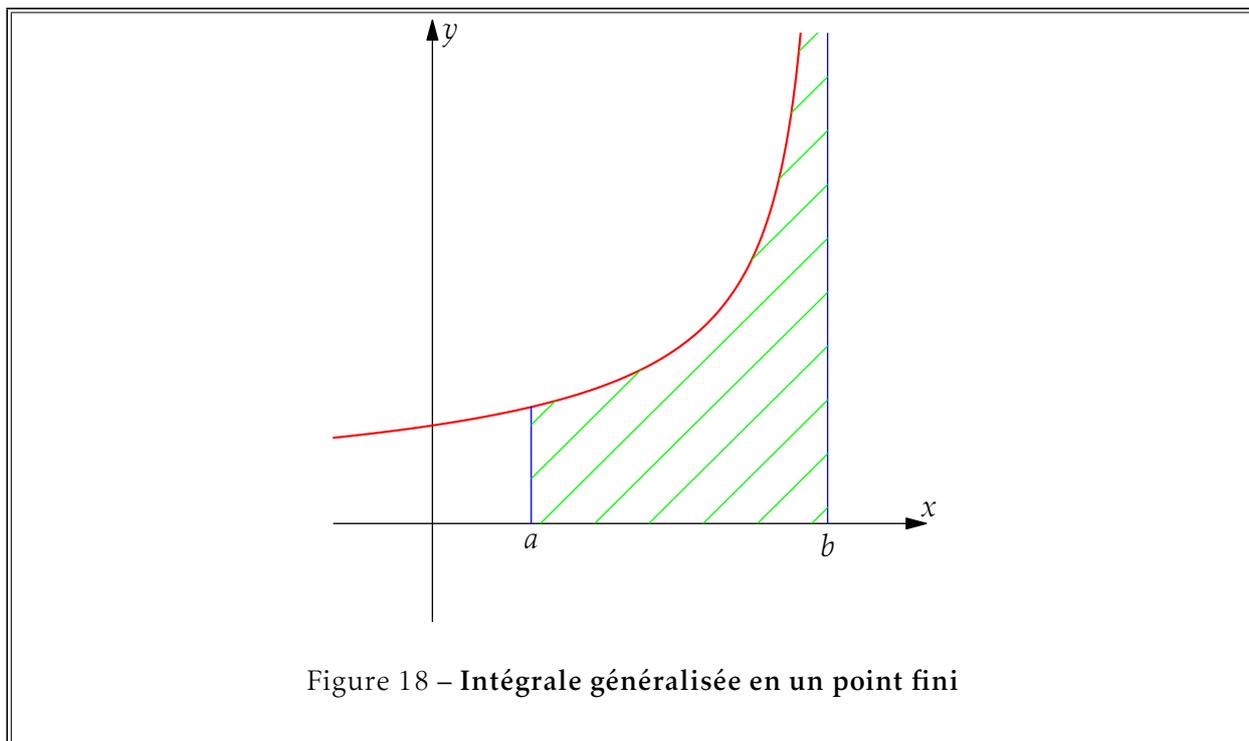
$$\Leftrightarrow \int_a^x f(t) dt \text{ a une limite finie quand } x \rightarrow b^-$$

On a la même définition sur  $[a, +\infty[$ ,  $]a, b]$ , ou  $]-\infty, b]$ . On écrira l'ensemble des théorèmes pour  $]a, b[$

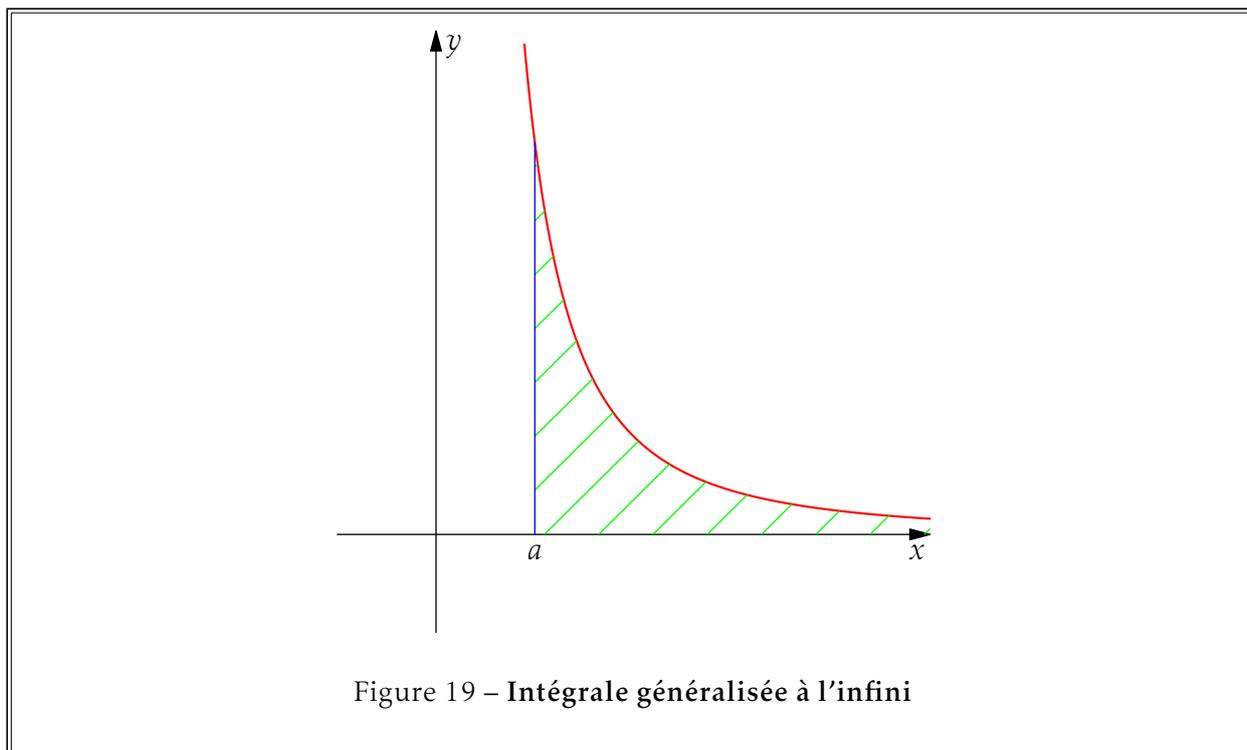
Le lecteur adaptera les énoncés aux autres intervalles.

Cependant le théorème dit du « faux-problème » n'est pas applicable à l'infini.

La figure 18, ci-dessous, représente le cas où  $b$  est fini et où la fonction est positive. Le problème est de savoir si l'aire hachurée est « finie ».



La figure 19, page suivante, représente le cas où on est à l'infini et où la fonction est positive. Le problème est de savoir si l'aire hachurée est « finie ».



**Théorème :** (convergence absolue)

$$\int_a^b |f(t)| dt \text{ converge} \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \text{ converge et : } \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

**Théorème :** Si  $f$  est de signe constant sur  $[a, b[$ , alors :  $\int_a^b f(t) dt$ ,  $\int_a^b -f(t) dt$  et  $\int_a^b |f(t)| dt$  sont de même nature.

La convergence de l'intégrale équivaut à sa convergence absolue.

**Théorème :** (faux problème)

$f$  continue sur  $[a, b[$ , admettant une limite finie en  $b^-$ , c'est à dire qu'elle est prolongeable par continuité (en un point fini  $b!$ ), alors  $\int_a^b f(t) dt$  converge

**Théorème :** (intégrabilité au sens fort)

$f$  est dite intégrable, ou intégrable au sens fort, sur  $I$  un intervalle

si et seulement si  $\int_I |f|$  est simple ou bien  $\int_I |f|$  converge.

Si l'intégrale de  $f$  est généralisée, cela revient à la convergence absolue de l'intégrale.

## 23.2. Fonctions positives

**Théorème :** (Riemann)

$$\begin{cases} \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ converge} & \Leftrightarrow \alpha < 1 \\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ converge} & \Leftrightarrow \alpha > 1 \end{cases}$$

**Théorème :** (Comparaison)

$$\forall t \in [a, b[, \quad 0 \leq f(t) \leq g(t) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_a^b g(t) dt \text{ converge} \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \text{ converge} \\ \int_a^b f(t) dt \text{ diverge} \Rightarrow \int_a^b g(t) dt \text{ diverge} \end{array} \right.$$

**Théorème :** (Equivalence)

$$\left. \begin{array}{l} f(t) \underset{b^-}{\sim} g(t) \\ f(t) \text{ de signe constant} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \text{ et } \int_a^b g(t) dt \text{ sont de même nature}$$

### 23.3. Théorème des 3 conditions

Le théorème des 3 conditions est encore applicable pour les intégrales généralisée.

$$\text{Théorème : } \left. \begin{array}{l} \forall t \in [a, b[, \quad f(t) \geq 0 \\ f \text{ continue sur } [a, b[ \\ \int_a^b f(t) dt \text{ convergente et : } \int_a^b f(t) dt = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \forall t \in [a, b[, \quad f(t) = 0$$

On utilise souvent ce théorème quand on a un produit scalaire défini par une intégrale, pour montrer le caractère défini-positif de la forme quadratique.

### 23.4. Intégration par parties et changement de variable pour une intégrale généralisée

a/ Intégration par parties

$$\left. \begin{array}{l} u \text{ et } v \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [a, b[ \\ \lim_{t \rightarrow b} u(t)v(t) \text{ existe et est finie} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b u(t)v'(t) dt \text{ et } \int_a^b u'(t)v(t) dt \text{ sont de même nature}$$

et si elles convergent :  $\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^{b^-} - \int_a^b u'(t)v(t) dt$

b/ Changement de variable

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continue sur } I \\ \varphi \text{ monotone de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [\alpha, \beta[ \\ \varphi([\alpha, \beta[) \subset I \end{array} \right\} \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \text{ et } \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u) du \text{ sont de même nature}$$

et si elles convergent :  $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u) du$

Le changement de variable est donc  $u = \varphi(t)$  dont on vérifiera qu'il est bien monotone de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle de variation de  $t$ .

c/ Travail en primitives

On peut, au besoin, **se passer des théorèmes** d'intégration par parties et de changement de variable dans les intégrales généralisées en travaillant en **primitives**. On revient alors aussi à la définition de la convergence d'une intégrale généralisée par limite finie d'une primitive...

### 23.5. Un procédé de convergence

- Si on a  $\alpha < 1$  tel que  $\lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha f(t) = 0$ , alors  $|f(t)| = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ ,  
et donc  $\int_0^1 f(t) dt$  converge absolument donc converge.

- Si on a  $\alpha > 1$  tel que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = 0$ , alors  $|f(t)| = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ ,  
et donc  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  converge absolument donc converge.

Ceci n'est pas un théorème, il faut à chaque fois refaire la démonstration...

## 23.6. Continuité et dérivation sous $\int \dots$ pour une intégrale généralisée

Ces théorèmes sont valables sur tous les types d'intervalles, c'est pour l'exemple qu'on a défini la continuité sur  $[a, b[$  et classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, +\infty[$ .

**Théorème :** (Continuité)

$$F \text{ définie par } F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$$

$$f : \left. \begin{array}{l} J \times [a, b[ \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) \mapsto f(x, t) \end{array} \right\} \text{ avec } f \text{ continue sur } J \times [a, b[,$$

Si il existe  $\varphi$  telle que :  $\forall x \in J, \forall t \in [a, b[, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$ , et  $\int_a^b \varphi(t) dt$  converge, alors  $F$  est définie et continue sur  $J$ .

**Théorème :** (Classe  $\mathcal{C}^1$ )

$$F \text{ définie par } F(x) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dt$$

$$f : \left. \begin{array}{l} J \times [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) \mapsto f(x, t) \end{array} \right\} \text{ avec :}$$

- $f$  et  $\frac{\partial f}{\partial x}$  continues par morceaux et  $f$  intégrable (au sens fort) par rapport à  $t$  sur  $[a, +\infty[$  ;
- $\frac{\partial f}{\partial x}$  continue par rapport à  $x$  sur  $J$

Si il existe  $\varphi$  telle que :  $\forall x \in J, \forall t \in [a, +\infty[, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$ , et  $\int_a^{+\infty} \varphi(t) dt$  converge, alors  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $J$  et :  $F'(x) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ .

Il est important que  $\varphi$ , **ne dépende pas de  $x$** .

Ce sont des fonctions réelles positives dont les intégrales convergent.

## 23.7. Ensemble de définition

L'ensemble de définition d'une fonction  $F$  de la variable  $x$  est l'ensemble des valeurs de  $x$  pour lesquelles on peut effectivement calculer  $F(x)$ .

Ainsi, si on a :

- $F : x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$  ou,
- $F : x \mapsto \int_a^{+\infty} f(x, t) dt$  ou encore,
- $F : x \mapsto \int_a^{a+x} f(t) dt$

L'ensemble de définition de  $F$  est l'ensemble des valeurs de  $x$  telles que :

- l'intégrale est simple, ou bien,
- l'intégrale est généralisée et convergente.

## 24. Intégrales doubles et triples

On définit les intégrales doubles et triples comme des intégrales simples emboîtées.

### 24.1. Description hiérarchisée du domaine et intégrale

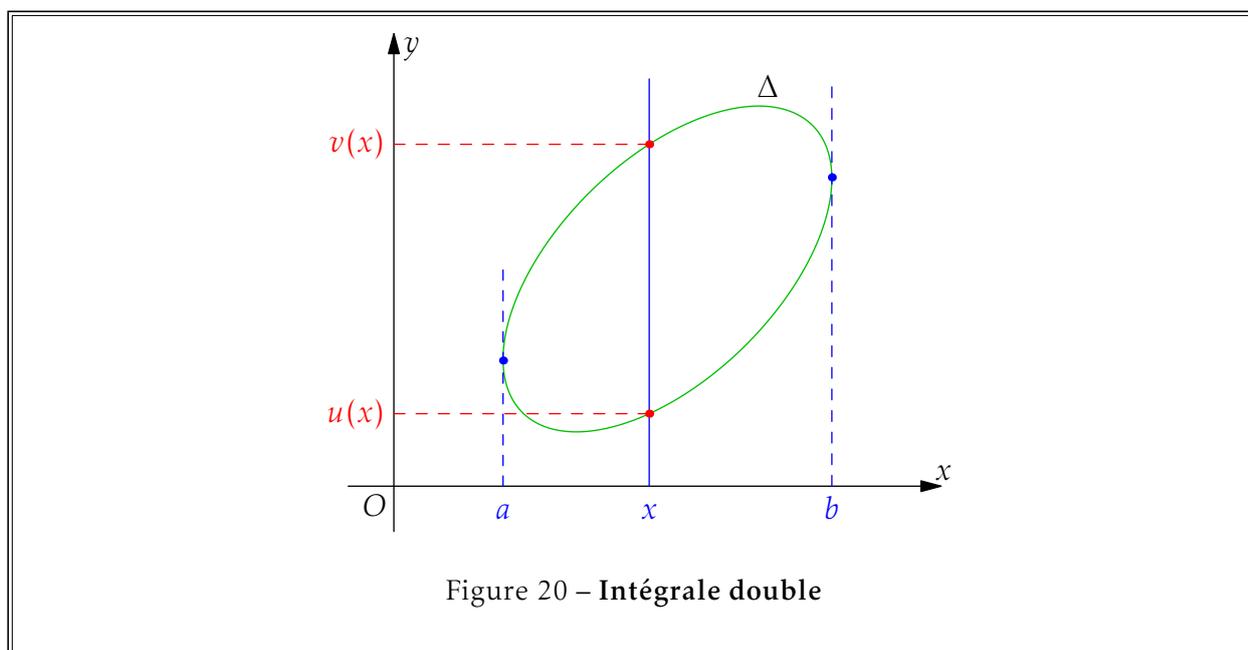
On ne peut calculer une intégrale multiple que si on a une description hiérarchisée du domaine :

a/ Pour une intégrale double

Voir la figure 20, ci-dessous.

$$(x, y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a, b] \\ y \in [u(x), v(x)] \end{cases}$$

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy \right) dx$$



b/ Théorème de Fubini : inversion des bornes

Voir la figure 21, page suivante.

On peut avoir les variables dans un autre ordre, l'important est que les bornes de chacune ne soient définies qu'en fonction des précédentes.  
C'est le théorème de Fubini.

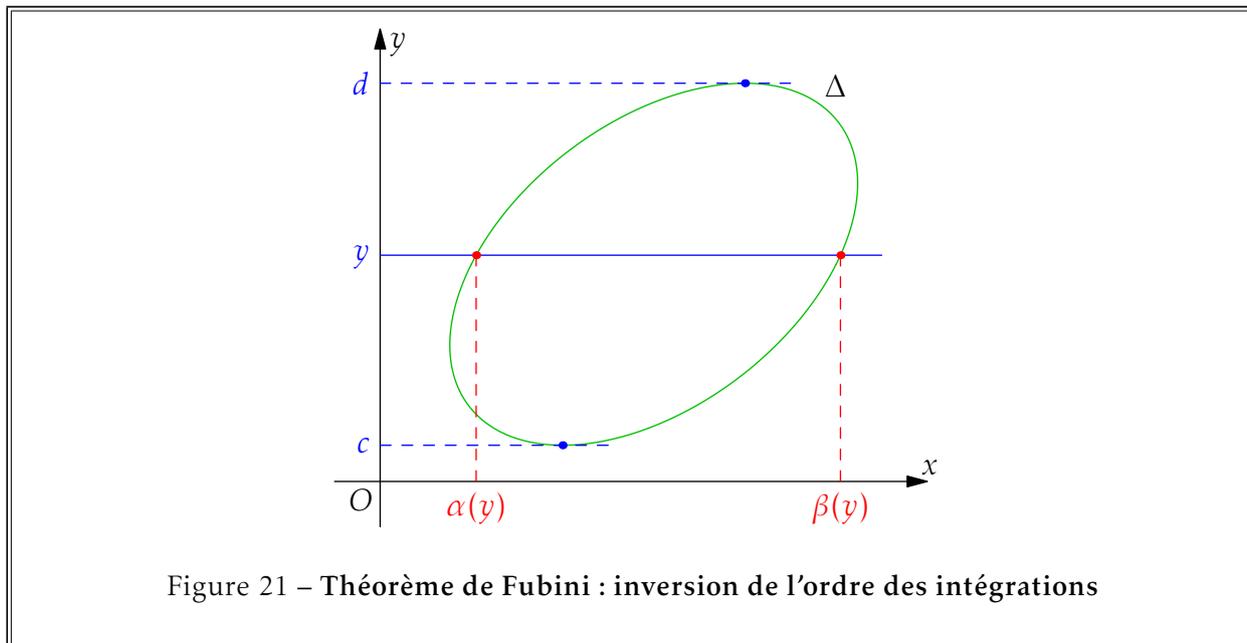
**Théorème :** Si on a par ailleurs :  $(x, y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} y \in [c, d] \\ x \in [\alpha(y), \beta(y)] \end{cases}$  avec  $c < d$  et  $\forall y \in [c, d], \alpha(y) \leq \beta(y)$ ,

alors :

$$I = \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

c/ Pour une intégrale triple

Voir la figure 22, page 59.



$$(x, y, z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a, b] \\ y \in [u(x), v(x)] \\ z \in [\alpha(x, y), \beta(x, y)] \end{cases}$$

$$\iiint_{\Delta} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left( \int_{u(x)}^{v(x)} \left( \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

On peut avoir les variables dans un autre ordre, l'important est que les bornes de chacune ne soient définies qu'en fonction des précédentes.

## 24.2. Calcul d'Aires et de Volumes

On travaille ici dans un repère orthonormal.

- Dans le plan, l'aire **géométrique** du domaine  $\Delta$  est :  $\mathcal{A} = \iint_{\Delta} dx dy$  ;
- Toujours dans le plan, l'aire délimitée par la courbe  $\rho = \rho(\theta)$ , avec  $\rho \geq 0$ , est :  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta$  ;
- Dans l'espace, le volume **géométrique** du domaine  $\Delta$  est :  $\mathcal{V} = \iiint_{\Delta} dx dy dz$ .

## 24.3. Inclusion des domaines

**Théorème :** Si  $f$  est continue et **positive** sur  $\Delta$ , avec, de plus,  $D \subset \Delta$ , alors

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_{\Delta} f(x, y) dy dx$$

On a la même chose pour une intégrale triple.

## 24.4. Changement de variables

a/ Intégrale double

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \text{ bijective (ou presque...)}$$

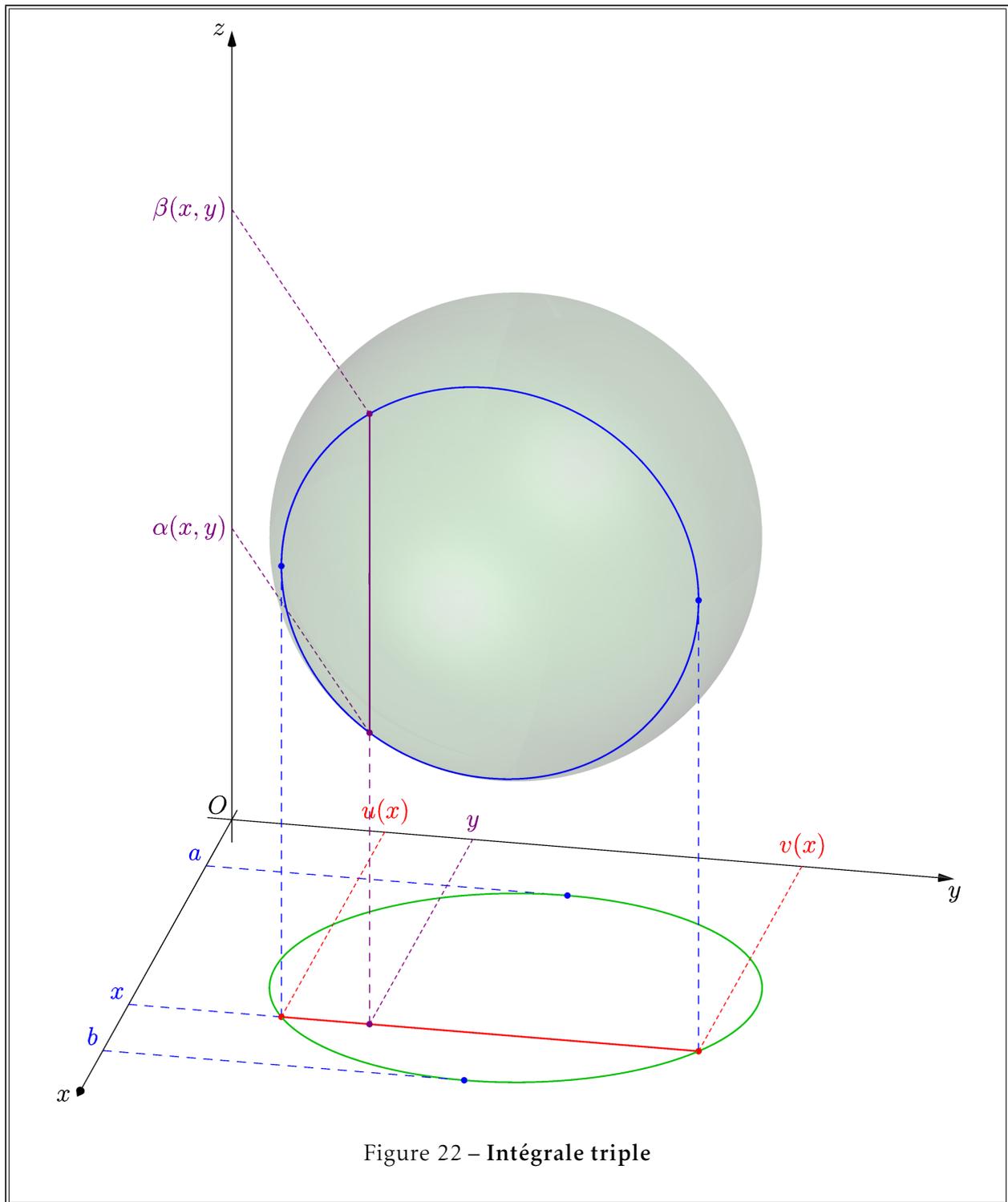


Figure 22 – Intégrale triple

$$(x, y) \in D \Leftrightarrow (u, v) \in \Delta, \text{ et : } f(x, y) = g(u, v)$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} g(u, v) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv$$

On notera la **valeur absolue** du jacobien et la pseudo-simplification.

b/ Intégrale triple

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \text{ bijective (ou presque...)} \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

$$(x, y, z) \in D \Leftrightarrow (u, v, w) \in \Delta, \text{ et : } f(x, y, z) = g(u, v, w)$$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_\Delta g(u, v, w) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw$$

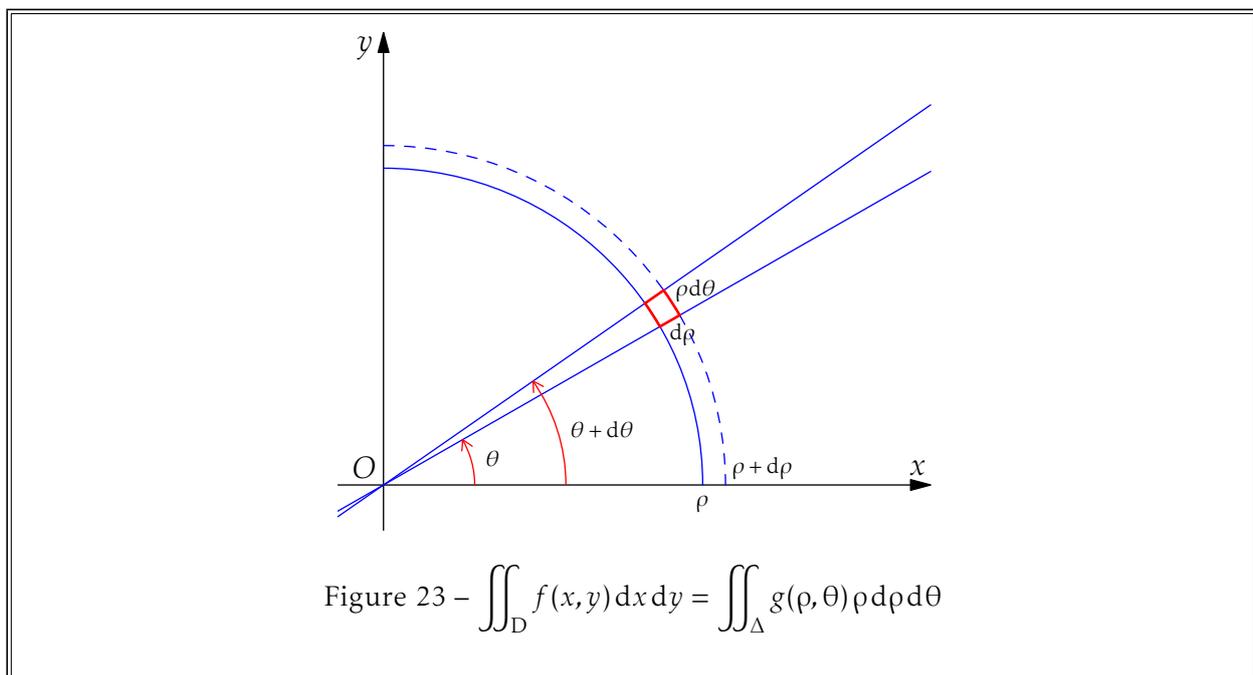
On notera la **valeur absolue** du jacobien et la pseudo-simplification.

### c/ Intégrale double en Polaires

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

$$(x, y) \in D \Leftrightarrow (\rho, \theta) \in \Delta, \text{ et : } f(x, y) = g(\rho, \theta)$$

La figure 23, ci-dessous, indique le mode de calcul.



### d/ Intégrale triple en Cylindriques

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$(x, y, z) \in D \Leftrightarrow (\rho, \theta, z) \in \Delta, \text{ et : } f(x, y, z) = g(\rho, \theta, z)$$

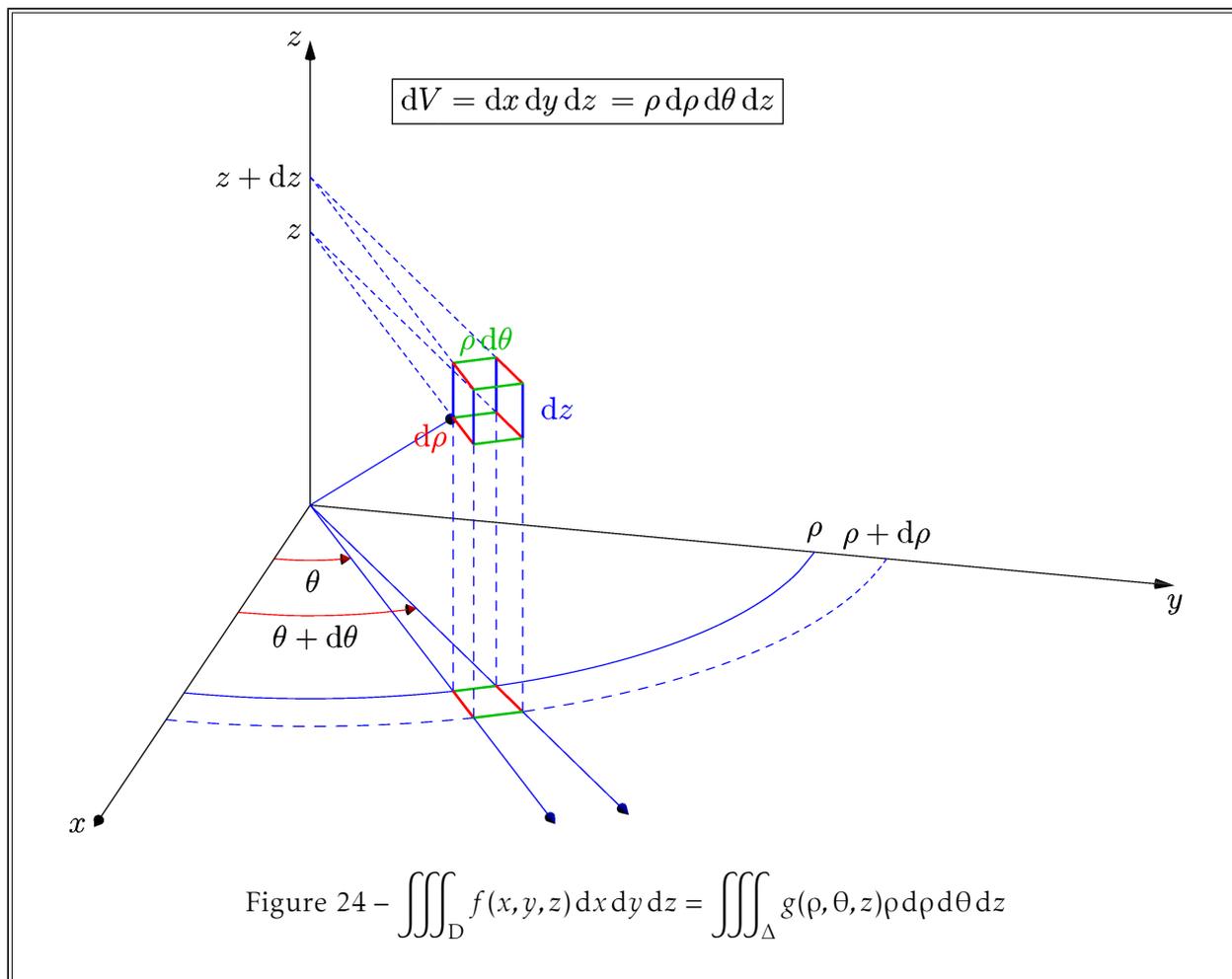
La figure 24, page ci-contre, indique le mode de calcul.

### e/ Intégrale triple en Sphériques

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ z = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

$$(x, y, z) \in D \Leftrightarrow (\rho, \theta, \varphi) \in \Delta, \text{ et : } f(x, y, z) = g(\rho, \theta, \varphi)$$

La figure 25, page 62, indique le mode de calcul.



Il s'agit de la convention des mathématiciens : les physiciens utilisent un autre angle.  
 En mathématiques, en général,  $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .  
 Les physiciens utilisent l'angle entre Oz et OM qui appartient donc à  $[0, \pi]$ . Dans la formule, au niveau de la valeur absolue du jacobien, ils échangent ainsi  $\sin \varphi$  et  $\cos \varphi$ .  
 En plus, parfois, ils changent le nom des angles...

- On fait un changement de variable
- pour simplifier le domaine, **ce qui est nouveau**,
  - ou pour simplifier le calcul des primitives emboîtées.

## 25. Séries numériques (réelles ou complexes)

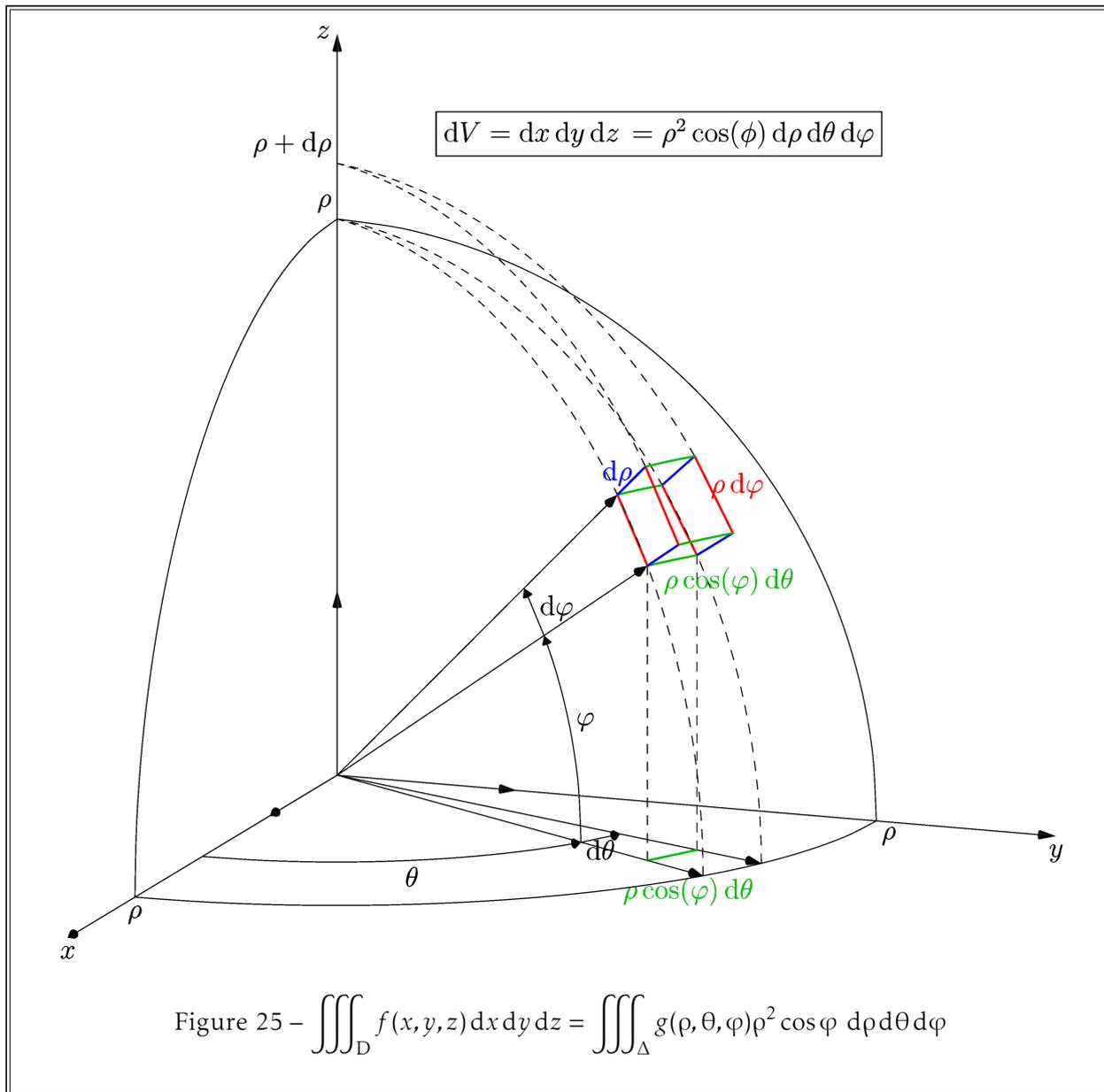
### 25.1. Convergence

**Définition :**  $\sum u_n$  converge  $\Leftrightarrow$  la suite des sommes partielles  $(s_n)$  avec  $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$  converge.

**Théorème :** (Condition nécessaire élémentaire de convergence)

$$\sum u_n \text{ converge} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Cette propriété est surtout utilisée pour montrer qu'une série diverge en montrant que le terme général ne tend pas vers 0.  
 On parle alors de *divergence grossière*.  
 Par ailleurs, ceci **n'est pas** une équivalence...



## 25.2. Convergence Absolue

**Théorème :**  $\sum |u_n|$  converge  $\Rightarrow \sum u_n$  converge.

(règle  $n^\alpha u_n$ )

Si on a  $\alpha > 1$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha u_n = 0$ , alors  $|u_n| = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$  et donc  $\sum u_n$  converge absolument et donc converge.

Ceci n'est pas un théorème et est donc à réargumenter à chaque fois...

## 25.3. Séries géométriques

**Théorème :** La série de terme général  $x^n$  converge  $\Leftrightarrow |x| < 1$ .

De plus, la somme est :  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

**Définition :** Une suite **géométrique** est une suite vérifiant :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a u_n$ .  
 $a$  est la **raison** de la suite.

La somme d'une série géométrique convergente est donc :  $\frac{\text{« le premier terme »}}{1 - \text{« la raison »}}$ .  
 Ceci prolonge et généralise la somme des termes d'une suite géométrique qui est :

$$\frac{\text{« le premier terme »} - \text{« le premier terme manquant »}}{1 - \text{« la raison »}}$$

Quand la série converge, il n'y a pas de termes manquants...

## 25.4. Séries positives

**Théorème :** (Riemann)

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha} \Rightarrow (\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1)$$

**Théorème :** (Comparaison)

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum v_n \text{ converge} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge.}$$

**Corollaire :**  $\left. \begin{array}{l} 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum u_n \text{ diverge} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum v_n \text{ diverge.}$

**Théorème :** (Équivalence)

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq u_n \\ u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \end{array} \right\} \Rightarrow \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

**Théorème :** (d'Alembert)

$$\sum u_n \text{ à terme strictement positifs, telle que } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \quad \left\{ \begin{array}{l} l < 1, \quad \sum u_n \text{ converge} \\ l > 1, \quad \sum u_n \text{ diverge grossièrement} \\ l = 1, \quad \text{on ne sait rien} \end{array} \right.$$

On tombe très souvent sur le cas douteux ! Pour ne pas tomber sur le cas douteux, il est souvent nécessaire d'avoir la présence d'une factorielle ou d'un exposant dépendant de  $n$ . Les fonctions de Riemann fournissent toujours le cas douteux !...

Ainsi on utilise le théorème de d'Alembert dans le cadre des séries entières, ou lorsqu'on a, dans l'expression de  $u_n$ , des factorielles, des termes de nature géométrique ( $a^n$ ) ou des exponentielles.

## 25.5. Critère spécial des séries alternées

**Définition :**  $\sum u_n$  est une série **alternée**  $\Leftrightarrow (-1)^n u_n$  est de signe constant.

**Théorème :**  $\sum u_n$  une série **alternée**

$$\left. \begin{array}{l} (|u_n|) \searrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge.}$$

De plus,  $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ , où  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ ,

enfin,  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$  est du signe de  $u_0$ ,  $R_n$  est du signe de  $u_{n+1}$

Voir la figure 26, page suivante.

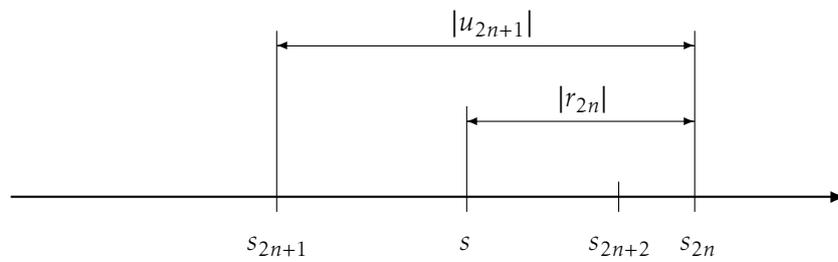


Figure 26 – Convergence d’une série répondant au critère spécial

### 25.6. Comparaison d’une série et d’une intégrale

**Théorème :**  $f$  une fonction **positive et décroissante** définie sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $\int_0^{+\infty} f(t)dt$  et  $\sum f(n)$  sont de même nature.

Et si elles convergent : 
$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt$$

La figure 27, ci-dessous, donne les inégalités de base !  
Il ne faut pas hésiter à la refaire pour retrouver ces inégalités.

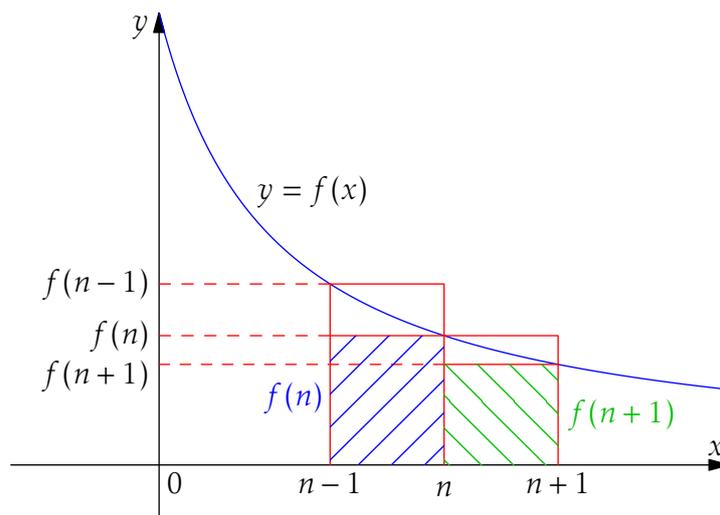


Figure 27 – Comparaison série-intégrale

### 25.7. Suite et série des différences

**Théorème :** La suite  $(u_n)$  converge  $\Leftrightarrow$  La série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  converge

Cela sert parfois à montrer la convergence de quelques...suites, en montrant la convergence ou la convergence absolue de la série des différences.

### 25.8. Calcul exact de sommes de séries

On dispose principalement de trois techniques

- Utilisation de séries entières par leur valeur en un point.
- Utilisation de séries de Fourier par leur valeur en un point ou la formule de Parseval.

- Calcul effectif de la limite de la suite des sommes partielles où les termes s'en vont en dominos.

Le cas le plus simple étant :  $\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$

## 25.9. Calcul approché de sommes de séries

- Dans le cas d'une série alternée répondant au critère spécial, on applique ce critère.
- Dans les autres cas, on s'intéresse à la série des modules.
  - Si elle converge par application du critère de d'Alembert, majorer le reste par une série géométrique
  - Sinon, majorer le reste en utilisant une intégrale ou...

## 26. Séries Entières

**Définition :** Une **série entière** est une série de la forme  $\sum a_n z^n$  ou  $\sum a_n x^n$ , selon que l'on travaille sur  $\mathbb{C}$  ou sur  $\mathbb{R}$

### 26.1. Rayon de convergence

Pour rechercher le rayon de convergence  $R$ ,

- Principe général :
  - $\sum a_n z^n$  et  $\sum |a_n| z^n$  ont le même rayon de convergence ;
  - Si  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$ , alors,  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  ont le même rayon de convergence ;
  - Si on a un  $z_0$  tel que  $\sum |a_n| |z_0|^n$  est le cas douteux de d'Alembert, alors  $R = |z_0|$  ;
  - Si, pour tous les  $z_0$ ,  $\sum a_n z_0^n$  converge, alors  $R = +\infty$  ;
  - Si on a un  $z_0$  tel que  $\sum a_n z_0^n$  converge, absolument ou pas, alors  $R \geq |z_0|$  ;
  - Si on a un  $z_0$  tel que  $\sum a_n z_0^n$  diverge, absolument ou pas, alors  $R \leq |z_0|$  ;
  - Si un nombre est plus grand que tous les nombres qui sont plus petit que  $r$ , strictement ou pas, alors, il est plus grand que  $r$  ;
  - Si un nombre est plus petit que tous les nombres qui sont plus grand que  $r$ , strictement ou pas, alors, il est plus petit que  $r$ .
- Dans le cas où le principe général précédent ne fournit pas le résultat, on utilise l'une des propriétés suivantes :
  - $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+, \text{ la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$
  - $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+, \text{ la suite } (a_n r^n) \text{ tend vers } 0\}$

Une inégalité relative au rayon de convergence est **toujours large**.

### 26.2. Convergence

**Théorème :** 
$$\begin{cases} |z| < R \Rightarrow \sum a_n z^n & \text{converge absolument} \\ |z| > R \Rightarrow \sum a_n z^n & \text{diverge grossièrement} \\ |z| = R & \text{on ne sait rien a priori sur la convergence} \end{cases}$$

La figure 28, page suivante, illustre ce théorème.

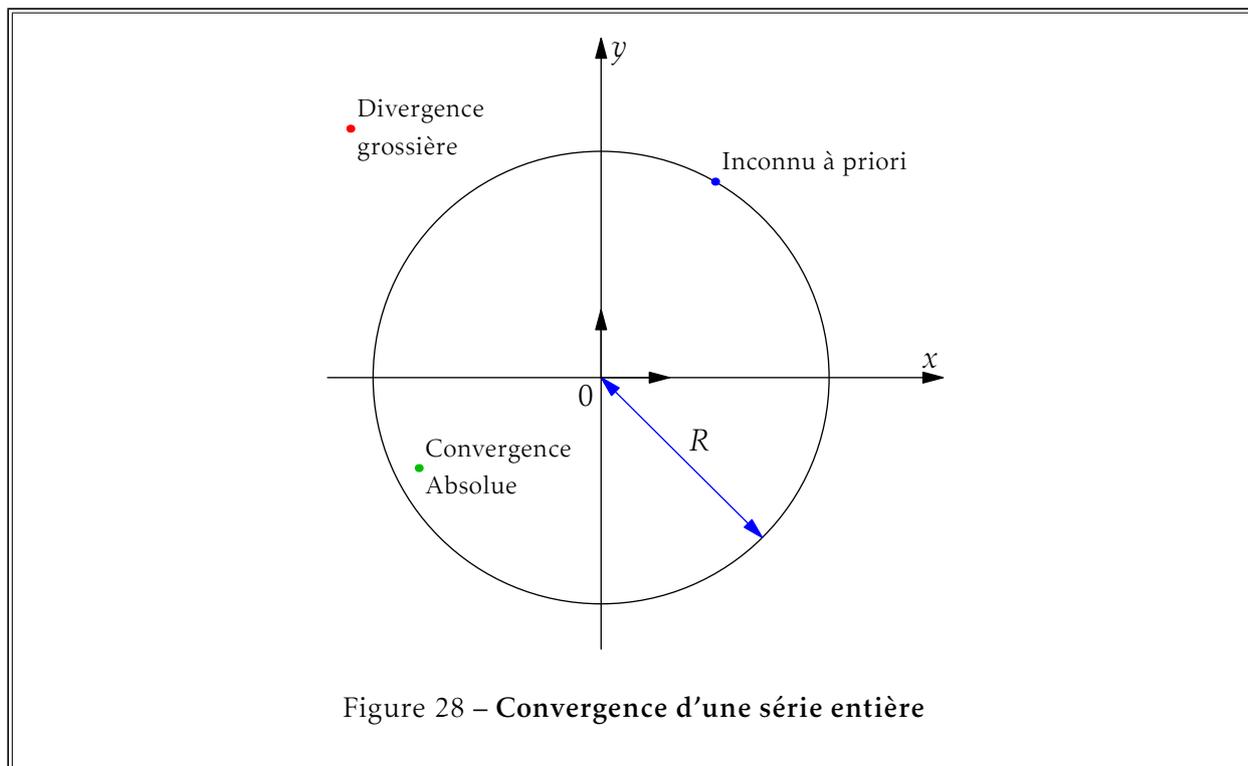
**Théorème :** Quand la variable est réelle, la série entière se dérive et s'intègre terme à terme sur  $] -R, R[$  au moins.

Elle s'intègre même terme à terme au moins sur sur **l'intervalle de convergence**

**Théorème :** La série entière, sa série dérivée et ses séries primitives ont le même rayon de convergence.

**Théorème :** La somme d'une série entière est continue sur son ensemble de définition.

**Théorème :** La somme d'une série entière est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -R, R[$ .



### 26.3. Somme de deux séries entières

**Théorème :**  $\left. \begin{array}{l} \sum a_n z^n \text{ de rayon } R_1 \\ \sum b_n z^n \text{ de rayon } R_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum (a_n + b_n) z^n \text{ est de rayon } \begin{cases} \inf(R_1, R_2) & \text{pour : } R_1 \neq R_2 \\ R \geq R_1 & \text{pour : } R_1 = R_2 \end{cases}$

### 26.4. Développement d’une fonction en série entière

**Définition :** Une fonction  $f$  est **développable en série entière** en 0

$\Leftrightarrow$  il existe une série entière et un intervalle  $I$ , contenant 0, tels que  $\forall x \in I, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

**Théorème :**

Si  $f$  est développable en série entière en 0 alors la série entière est la série de Taylor et :  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

En général  $I$  est l’intersection de l’ensemble de définition de  $f$  et de l’ensemble de convergence de  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ , mais cela n’est pas une obligation...

Pour développer une fonction en série entière, on peut :

- utiliser les séries entières usuelles.  
Assez souvent, parfois en dérivant, on fait apparaître une fraction rationnelle. On la décompose alors en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  pour ensuite utiliser des séries géométriques...
- sur indication de l’énoncé, utiliser une équation différentielle.
- ou calculer la série de Taylor.

Dans tous les cas, il faudra avec soin justifier la convergence de la série entière **et son égalité** avec la fonction. Cela peut être délicat dans le cas de la série de Taylor... qu’on n’utilisera donc qu’à la demande de l’énoncé.

### 26.5. Séries entières usuelles

Voir le tableau 3, page suivante, des séries entières usuelles.

La série géométrique et l’exponentielle sont aussi valables pour une variable complexe.

Tableau 3 – DÉVELOPPEMENTS USUELS EN SÉRIE ENTIÈRE

f	$D_f$	DSE	R	I
$e^x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x}$	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$	1	$]-1, 1[$
$\ln(1+x)$	$]-1, +\infty[$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	1	$]-1, 1]$
$\frac{1}{1-x}$	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	1	$]-1, 1[$
$\ln(1-x)$	$]-\infty, 1[$	$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$	1	$[-1, 1[$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$	1	$[-1, 1]$
$(1+x)^a$	$]-1, +\infty[$	$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n$	1 ou $+\infty$ ( $a \in \mathbb{N}$ )	

## 26.6. Série entière solution d'une équation différentielle

- On considère au départ une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ , solution de l'équation différentielle (E). On pose donc :  $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .
- Tout ce qu'on écrit est valable pour  $x \in ]-R, R[$ . **Il faut dire** qu'on se place sur  $]-R, R[$ ...
- On calcule  $y'$  et au besoin  $y''$ , on reporte dans l'équation.
- On éclate tout en sommes de séries entières.
- On **regroupe ce qui se regroupe naturellement**, les termes en  $x^n$ , ceux en  $x^{n-1}$ ...
- Ensuite, on **réindexe pour trouver une série entière unique** et nulle.
- Alors, chaque coefficient est nul, par unicité du développement en série entière quand il existe. On a en général une relation de récurrence entre les coefficients. Cette relation permet normalement de calculer les coefficients mais aussi assez souvent de trouver directement le rayon de convergence, ce qui est indispensable.

## 27. Séries de Fourier

### 27.1. Série de Fourier et coefficients de Fourier de $f$

**Définition :**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $T$ -périodique, continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ , on appelle **série de Fourier de  $f$** , la série :

$$S(f)(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \quad \text{avec : } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{On a } a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt,$$

$$\text{et pour } n \geq 1, \quad \begin{cases} a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos n\omega t dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sin n\omega t dt \end{cases}$$

$a_0$  est la valeur moyenne de  $f$ .

Dans le cas où  $f$  est paire ou impaire, on peut travailler sur une demi-période bien choisie. C'est à dire que, le plus souvent, les intégrales sont calculées entre 0 et  $\frac{T}{2}$ .

D'autre part, souvent, on ne dispose d'une formule explicite pour  $f(t)$  que sur un certain intervalle. On veillera avec soin à ne pas utiliser cette formule **en dehors** de cet intervalle !

Si cela est plus facile, on peut calculer :

$$c_0 = a_0 = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) dt, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) e^{-in\omega t} dt = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

Si la fonction est réelle, les  $a_n$  et  $b_n$  sont réels et on les obtient par un seul calcul...

## 27.2. Cas où $f$ est $2\pi$ -périodique

Dans le cas où  $f$  est  $2\pi$ -périodique,  $S(f)(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt,$$

$$\text{et pour } n \geq 1, \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) \cos nt dt \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) \sin nt dt \end{cases}$$

• Si, de plus,  $f$  est paire :  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt,$

$$\text{et pour } n \geq 1, \quad \begin{cases} a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt dt \\ b_n = 0 \end{cases}$$

• ou si  $f$  est impaire :  $a_n = 0,$

$$\text{et pour } n \geq 1, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt dt$$

Dans les séries de Fourier, assez souvent, on n'a de formule pour  $f$  que dans un certain intervalle, on veillera donc, comme on l'a déjà dit, à n'utiliser cette formule que sur cet intervalle...

Tout ceci est résumé dans le tableau 4 page ci-contre.

## 27.3. Convergence

**Théorème :** (Dirichlet, cas général)

$f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  **par morceaux** sur  $\mathbb{R}$ ,  $T$ -périodique

$\Rightarrow$  la série de Fourier de  $f$  converge en tous points, et sa somme est :  $S(f)(t) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$   
où  $f(t+0)$  et  $f(t-0)$  sont les limites à droite et à gauche de  $f$  en  $t$ .

Tableau 4 – COEFFICIENTS DE FOURIER

	T-périodique		2π-périodique		f paire		f impaire	
	T-périodique	2π-périodique	T-périodique	2π-périodique	T-périodique	2π-périodique	T-périodique	2π-périodique
$a_0$	$\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) dt$	$\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) dt$	$\frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt$	$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt$	0	0	0	0
$a_n (n \geq 1)$	$\frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos n\omega t dt$	$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) \cos nt dt$	$\frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt$	$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt dt$	0	0	0	0
$b_n (n \geq 1)$	$\frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sin n\omega t dt$	$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) \sin nt dt$	0	0	$\frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt$	$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt dt$	$\frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt$	$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt dt$
$c_n (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) e^{-in\omega t} dt$	$\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) e^{-int} dt$	Sans objet		Sans objet		Sans objet	

En tous points où  $f$  est continue, on a donc bien :  $S(f)(t) = f(t)$ .

Il n'y a qu'aux points où  $f$  est discontinue qu'il risque d'y avoir un problème. On fera donc un graphe de la fonction **sur un peu plus d'une période** pour repérer les points de discontinuité et vérifier le caractère  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .

**Théorème :** (Dirichlet, cas continu)

$f$  **continue** et de classe  $\mathcal{C}^1$  **par morceaux** sur  $\mathbb{R}$ ,  $T$ -périodique

$\Rightarrow$  la série de Fourier de  $f$  converge en tous points, et :  $S(f)(t) = f(t)$ .

**Théorème :** Sur un intervalle  $[\alpha, \beta]$  où  $f$  est continue,  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$  peut se calculer en intégrant terme à terme la série de Fourier de  $f$ .

On ne confondra pas :

- de classe  $\mathcal{C}^1$  **par morceaux** sur  $\mathbb{R}$  ;
- avec **continue**, et de classe  $\mathcal{C}^1$  **par morceaux** sur  $\mathbb{R}$ .

La première est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ , et donc pas nécessairement continue sur  $\mathbb{R} \dots$

#### 27.4. Produit scalaire et formule de Parseval

**Théorème :**

$\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$ , l'ensemble des applications **continues**,  $T$ -périodiques,  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est un espace vectoriel réel.

De plus  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)g(t) dt$  est un produit scalaire de  $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$ .

La famille  $\{(\cos n\omega t)_{n \in \mathbb{N}}, (\sin n\omega t)_{n \in \mathbb{N}^*}\}$  est orthogonale pour ce produit scalaire.

Si les applications sont simplement **continues par morceaux**,  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)g(t) dt$  est une forme bilinéaire symétrique positive.

**Théorème :** (Formule de Parseval)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $T$ -périodique, **continue par morceaux** sur  $\mathbb{R}$ , alors :

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f^2(t)| dt = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} |f^2(t)| dt = |a_0^2| + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n^2| + |b_n^2|)$$

Si la fonction est réelle :

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Si, de plus,  $f$  est  $2\pi$ -périodique :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$28. \quad \int \sum = \sum \int \dots$$

**Problème :** Il s'agit de montrer que :  $\int_a^b \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_a^b f_n(t) dt \right)$ .

C'est à dire que l'intégrale d'une série est la série des intégrales.

Le problème n'est jamais évident. Il y a différentes solutions selon les intégrales. Toutes les justifications doivent se faire avec soin.

## 28.1. Série entière

Pour une série entière, on peut intégrer terme à terme sur tout intervalle inclus dans l'ouvert de convergence.

Il suffit donc de rappeler qu'on a une série entière et que  $[a, b] \subset ]-\mathbb{R}, \mathbb{R}[$

## 28.2. Autres cas

Que l'intégrale soit une intégrale simple ou une intégrale généralisée le traitement sera le même. L'idée est de sortir la somme partielle de la série par linéarité, il reste ensuite à montrer que l'intégrale du reste tend bien vers 0.

### a/ Utilisation du critère spécial des séries alternées

Si à  $t$  fixé,  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$  converge par application du critère spécial des séries alternées,

$$\text{on a alors : } \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) \right| \leq |f_{n+1}(t)|$$

Il suffit alors de montrer que  $\int_a^b |f_{n+1}(t)| dt \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$

$$\text{En effet, on écrit : } \int_a^b \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \underbrace{\sum_{k=0}^n \left( \int_a^b f_k(t) dt \right)}_{\text{somme partielle}} + \underbrace{\int_a^b \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) \right) dt}_{\text{intégrale du reste}}$$

et on majore ce dernier terme en valeur absolue. Enfin, on passe à la limite sur le terme de droite...

### b/ Série géométrique

Si à  $t$  fixé, la série est géométrique,  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)$  est aussi une série géométrique qui se calcule facilement.

$$\text{On calcule alors, ou on majore : } \int_a^b \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) \right) dt$$

### c/ Autres cas

Dans les autres cas, l'énoncé doit vous guider.

Le principe général est de majorer  $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) \right| \leq g_n(t)$  avec  $\int_a^b g_n(t) dt \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$  et d'appliquer le principe précédent.

Souvent, on vient de faire une telle majoration dans les questions précédentes...

Si l'intégrale est une intégrale généralisée, il ne faut pas oublier de montrer la convergence de **toutes** les intégrales utilisées.

## 29. Fonctions $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$

### 29.1. Limite et continuité

- Les fonctions « composantes » comme, par exemple,  $(x, y, z) \rightarrow y$  sont continues.
  - Les sommes, produit par un scalaire, produit, quotient (en un point où le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sont continues.
  - Les composées de fonctions continues sont continues.
- Ceci permet de montrer la plupart des continuités usuelles.

**Théorème :** Une fonction de plusieurs variables, à valeurs réelles, **continue sur un fermé-borné** est **bornée et atteint ses bornes**.

## 29.2. Classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$

**Définition :**  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p \Leftrightarrow f$  admet  $p$  dérivées partielles continues sur  $\mathcal{U}$

Quand ces dérivées partielles sont aussi de classe  $\mathcal{C}^1$ , on dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathcal{U}$

**Notation :** La dérivée partielle de  $f$  par rapport à la  $j^{\text{ème}}$  variable se note :  $D_j f$  ou  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ .

Prise au point (vecteur)  $a$ , elle se note donc :  $D_j f(a)$  ou  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ .

En dimension 2 ou 3, on remplace souvent  $x_1, x_2, x_3$  par  $x, y, z$ .

**Définition :** Quand  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , la **différentielle de  $f$**  en  $(x_0, y_0, z_0)$ , est l'application linéaire :

$$(dx, dy, dz) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) dz$$

On adapte au besoin cette définition en dimension  $p$ ...

**Théorème :** Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ , elle admet un développement limité à l'ordre 1 en tout point de  $\mathcal{U}$  et on a :

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) + \|u\| \varepsilon(u)$$

où  $u = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  et  $\lim_{u \rightarrow (0,0,0)} \varepsilon(u) = 0$ .

**Théorème :** (Schwarz)

$$f \text{ de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathcal{U} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

**Théorème :** (Fonctions composées)

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \left. \begin{array}{l} x, y, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ \mathcal{C}^1 \text{ sur } x(I) \times y(I) \times z(I) \\ F(t) = f(x(t), y(t), z(t)) \end{array} \right\} \Rightarrow F \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I, \text{ et : } F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z} z'(t)$$

Si  $x, y, z$  dépendent de 2 ou 3...variables, on a le même résultat en remplaçant toutes les dérivées par des dérivées partielles.

## 29.3. Extremums d'une fonction $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \rightarrow z = f(x, y)$ , une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

Pour chercher ses extremums :

- On cherche les points critiques, c'est à dire les points qui vérifient : 
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

Les extrémums sont à chercher parmi ces points critiques.

- En chaque point critique  $(x_0, y_0)$ , on calcule :
 
$$\begin{cases} r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{cases}$$
  - Si  $s^2 - rt < 0$   $(x_0, y_0)$  est un extremum (minimum pour  $r > 0$ , maximum pour  $r < 0$ )
  - Si  $s^2 - rt > 0$   $(x_0, y_0)$  est un col
  - Si  $s^2 - rt = 0$  on ne peut pas conclure, il faut étudier « à la main » le signe de  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$

### 30. Fonctions (ou suites) à valeur dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$

#### 30.1. Limite et continuité

On peut toujours considérer que ce sont  $n$  fonctions (ou suites) « coordonnées » ou « composantes » à valeur dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , ou même dans le deuxième cas,  $2n$  fonctions (ou suites) « coordonnées » ou « composantes » à valeur dans  $\mathbb{R}$ . Les notions de limite, de continuité, de dérivabilité (...) se ramènent aux propriétés équivalentes sur chacune des composantes.

#### 30.2. Fonction $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , classe $\mathcal{C}^1$

**Définition :** La **matrice jacobienne** de  $f$  est, avec ici  $n = 3$  et  $p = 2$  :
 
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} = J_f$$

C'est la matrice dans la base canonique de la différentielle de  $f$  au point considéré.

**Théorème :**

$$\left. \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \\ g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q, \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \end{array} \right\} \Rightarrow g \circ f \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et : } J_{g \circ f} = J_g \times J_f$$

#### 30.3. Fonction $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , classe $\mathcal{C}^1$

**Définition :** La matrice jacobienne de  $f$  en un point est alors carrée d'ordre  $n$ . Le **jacobien** de  $f$  en ce point est le déterminant de la matrice jacobienne.

**Théorème :** En un point où le jacobien de  $f$  est non nul,  $f$  définit localement une bijection et le jacobien de  $f^{-1}$  est l'inverse du jacobien de  $f$ .

Les  $\partial$  ne se pseudo-simplifient pas !

Ainsi  $\frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial x}$  ne vaut pas en général  $\frac{\partial z}{\partial x}$  et  $\frac{1}{\frac{\partial y}{\partial x}}$  n'est pas  $\frac{\partial x}{\partial y}$

### 31. Equations et systèmes différentiels

Notons d'abord qu'on résout une équation ou un système différentiels sur un **intervalle**.

#### 31.1. Généralités

a/ Recollement de solutions

Pour recoller en  $c$  les solutions sur deux intervalles,  $f$  sur  $]a, c[$  et  $g$  sur  $]c, b[$  il faut chercher à égaliser :

- les limites (finies) de  $f$  et  $g$  en  $c$

- les limites (finies) de  $f'$  et  $g'$  en  $c$
- et éventuellement les limites (finies) de  $f''$  et  $g''$  en  $c$  pour une équation différentielle du second ordre.

## b/ Équation différentielle linéaire

Une équation différentielle **linéaire**

- du **premier ordre** est de la forme :  $a(t)y' + b(t)y = g(t)$
  - du **second ordre** est de la forme :  $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = g(t)$
- $g(t)$  est appelé le second membre.

Les équation homogènes associées sont respectivement :

- $a(t)y' + b(t)y = 0$
- $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$

Pour une équation différentielle linéaire, la solution générale est toujours la somme de la solution générale de l'équation sans second membre, appelée aussi équation homogène associée, et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

D'où l'importance de connaître une telle solution particulière.

On ne tient compte des conditions initiales que lorsqu'on a obtenu la solution générale de l'équation (ou du système) **avec** second membre.

Sur un intervalle convenable, la solution générale de l'équation sans second membre est un espace vectoriel de dimension 1 pour une équation différentielle linéaire du premier ordre et 2 pour une équation différentielle linéaire du second ordre.

## c/ Courbe intégrale

Si  $y(x)$  est solution d'une certaine équation différentielle, la courbe  $y = y(x)$  est dite **courbe intégrale** de cette équation différentielle.

### 31.2. Equation Différentielle Non Linéaire du premier ordre

On ne dispose d'aucun théorème sur les équations différentielles non linéaires...

- En général, elle est à variables séparables,  $f(t)dt = g(y)dy \Rightarrow \int f(t)dt = \int g(y)dy + K$   
C'est le seul cas que l'on doit savoir traiter.
- Sinon, il faut se laisser guider par l'énoncé!

### 31.3. Équation Différentielle Linéaire du premier ordre

- Sans second membre  $a(t)y' + b(t)y = 0 \Rightarrow y(t) = Ke^{-\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}$  sur un intervalle  $I$  où  $a$  et  $b$  sont continues et où  $a$  ne s'annule pas.  $K$  étant un réel arbitraire.
- Avec second membre  $a(t)y' + b(t)y = c(t)$  sur un intervalle  $I$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont continues et où  $a$  ne s'annule pas.

Il ne nous manque qu'une solution particulière : toute solution particulière est bonne à prendre !

- Si l'équation différentielle est à coefficients constants et si le second membre est en  $P(t)e^{kt}$ , on peut appliquer la méthode décrite dans le paragraphe 31.4..
- On peut, faute de mieux, chercher une solution particulière par la variation de la constante :

$$z(t) = K(t)y(t) \quad \text{où} \quad y(t) = e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}$$

On reste en calcul formel le plus longtemps possible : les termes en  $K(t)$  disparaissent, cela revient alors au calcul d'une primitive de  $K'(t)$ .

La variation de la constante n'est pas un procédé miraculeux ! Elle peut donner des calculs longs et difficiles. On la réserve donc au cas où **on n'a pas d'autre procédé** pour obtenir une telle solution particulière.

### 31.4. Équation Différentielle Linéaire du second ordre à coefficients constants

- Sans second membre  $ay'' + by' + cy = 0$  on résout l'équation caractéristique  $ar^2 + br + c = 0$   
Si on a :
  - Deux racines distinctes, la solution est :  $y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$
  - Une racine double :  $y(t) = (\lambda t + \mu) e^{rt}$
  - Deux racines complexes :  $r = \alpha \pm i\beta$  et dans le cas où on cherche les solutions sur  $\mathbb{R}$  :  
 $y(t) = (\lambda \cos \beta t + \mu \sin \beta t) e^{\alpha t} = (k \cos \beta(t - t_0)) e^{\alpha t}$
- Avec second membre  $ay'' + by' + cy = P(t) e^{kt}$ , où P est un polynôme.  
On cherche une solution particulière de la forme :
  - $Q(t) e^{kt}$  si k n'est pas racine de l'équation caractéristique ;
  - $t Q(t) e^{kt}$  si k est racine simple de l'équation caractéristique ;
  - $t^2 Q(t) e^{kt}$  si k est racine double de l'équation caractéristique, avec Q(t) un polynôme arbitraire de même degré que P.
 Un second membre en  $P(t) e^{\alpha t} \cos \beta t$  se traite comme la partie réelle de :  $P(t) e^{(\alpha + i\beta)t}$ .

### 31.5. Equation Différentielle Linéaire du second ordre

- Sans second membre  $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$  sur un intervalle I où a, b et c sont continues et où a ne s'annule pas, il faut se laisser guider par l'énoncé pour trouver une première solution.  
Si a, b, c sont des polynômes, on peut chercher une solution polynomiale en cherchant d'abord une condition nécessaire sur le degré.
- Avec ou sans second membre, en ayant une solution  $y(t)$  de l'équation sans second membre, on peut chercher les solutions de la forme  $z(t) = K(t)y(t)$  (Variation de la constante, à réserver au cas où on n'a pas d'autre procédé).  
On obtient une équation différentielle linéaire du premier ordre en  $K'(t)$  avec ou sans second membre selon les cas.  
En pratique, on mène le calcul de façon théorique le plus longtemps possible.
- On ne cherche une solution sous forme de série entière qu'à la demande de l'énoncé.

### 31.6. Équation aux dérivées partielles

Ce sont des équations différentielles qui concernent des fonctions de plusieurs variables. On écrit ici les théorèmes avec simplement trois variables notées u, v et w. On note toujours ici  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , et on cherche une fonction f, respectivement de classe  $\mathcal{C}^1$  ou  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathcal{U}$ .

Quand une dérivée partielle, par exemple par rapport à u, est nulle, en intégrant, il apparaît naturellement une constante d'intégration.

Mais, ici, cette *constante* est constante quand les autres variables, v et w, sont constantes...

Cette *constante* est donc alors une *fonction arbitraire* de ces *autres variables* !

#### a/ Une dérivée partielle première nulle

Les solutions de :  $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$  sont :  $f(u, v, w) = F(v, w)$

avec F une fonction quelconque de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{U}$  – elle est alors considérée comme de 3 variables.

#### b/ Une dérivée partielle seconde nulle

Les solutions de :

- $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 0$  sont :  $f(u, v, w) = u F(v, w) + G(v, w)$   
avec F et G deux fonctions quelconques de classe  $\mathcal{C}^2$ ;
- $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0$  sont :  $f(u, v, w) = F(v, w) + G(u, w)$   
avec F et G deux fonctions quelconques de classe  $\mathcal{C}^2$ .

c/ Autres cas

Dans les autres cas, l'énoncé doit vous donner :

- un changement de variables ;
  - un changement de fonction inconnue
- qui permet de se ramener à un des cas précédents !

### 31.7. Système Différentiel Linéaire du premier ordre

On ne traite que les systèmes à coefficients constants  $X'(t) = AX(t)$  où A est une matrice carrée

d'ordre  $n$  et  $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$  ou  $X'(t) = AX(t) + B(t)$ , où B(t) est un vecteur second membre.

a/ Cas sans second membre

- Dans le cas où A est diagonalisable, on note  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  les valeurs propres et  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$  une base de vecteurs propres associés. Alors

$$X(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} U_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} U_2 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} U_n$$

- Dans le cas où A est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  mais pas sur  $\mathbb{R}$  sur lequel on cherche les solutions, pour chaque couple de valeurs propres non réelles, on peut directement remplacer
  - $\alpha e^{\lambda t} U + \bar{\alpha} e^{\bar{\lambda} t} \bar{U}$  par
  - $\beta \operatorname{Re}(e^{\lambda t} U) + \gamma \operatorname{Im}(e^{\lambda t} U)$  avec  $\beta$  et  $\gamma$  réels
- Dans le cas où A est triangularisable, non diagonalisable, on considère P de passage telle que  $T = P^{-1}AP$  avec T triangulaire supérieure.
  - On pose  $X(t) = PY(t)$  on obtient  $X'(t) = PY'(t)$  car P est constant.
  - On reporte dans le système différentiel et on obtient  $Y'(t) = TY(t)$ .
  - On résout ce système en résolvant la dernière équation et en remontant équation par équation.
  - Enfin,  $X(t) = PY(t)$  fournit le résultat.

b/ Cas avec second membre

Dans tous les cas, il faut considérer une matrice de passage P avec  $D = P^{-1}AP$  ou  $T = P^{-1}AP$  selon la diagonalisabilité ou pas. On obtient

- $Y'(t) = DY(t) + P^{-1}B(t)$  ou
- $Y'(t) = TY(t) + P^{-1}B(t)$  selon les cas.
- On résout équation par équation le système obtenu.

### 31.8. Système autonome de 2 équations différentielles

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \varphi(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = \psi(x, y) \end{array} \right\} \text{ avec } \varphi \text{ et } \psi \text{ continues sur } \mathcal{U} \text{ un ouvert de } \mathbb{R}^2,$$

est un **système autonome** de deux équations différentielles.

On l'appelle système autonome parce que la variable  $t$  n'intervient pas, en dehors des dérivées, bien sûr.

- On peut essayer de l'intégrer en passant en complexes,  $z = x + iy$ , en polaires ou en suivant les indications de l'énoncé.
- On peut aussi le transformer en équation différentielle plus classique  $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)}$
- Réciproquement, une équation différentielle  $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)}$  peut se transformer en système autonome en « ajoutant » du temps «  $t$  ». . . à condition, bien sûr, que ce système autonome soit facile à intégrer !

## Géométrie

## 32. Systèmes de coordonnées

Nous n'allons bien entendu pas décrire les coordonnées cartésiennes...

## 32.1. Coordonnées polaires

Elles sont décrites par les formules :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}, \text{ avec } \rho \geq 0 \text{ et } \theta \text{ décrivant un intervalle de longueur } 2\pi.$$

Les formules réciproques sont :  $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} + k\pi \end{cases}$ , avec  $k = 0$  si  $x > 0$  et  $k = 1$  si  $x < 0$ .

Ceci est illustré sur la figure 29, ci-dessous.

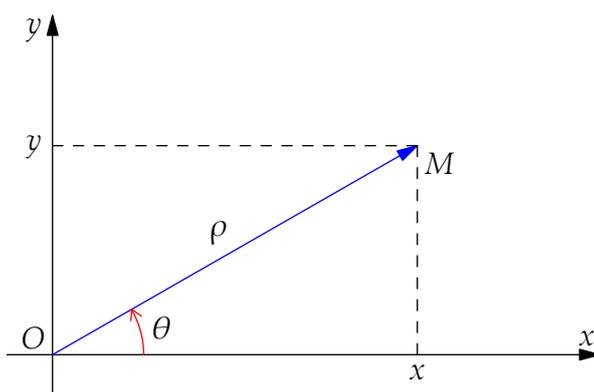


Figure 29 – Coordonnées Polaires

## 32.2. Coordonnées cylindriques

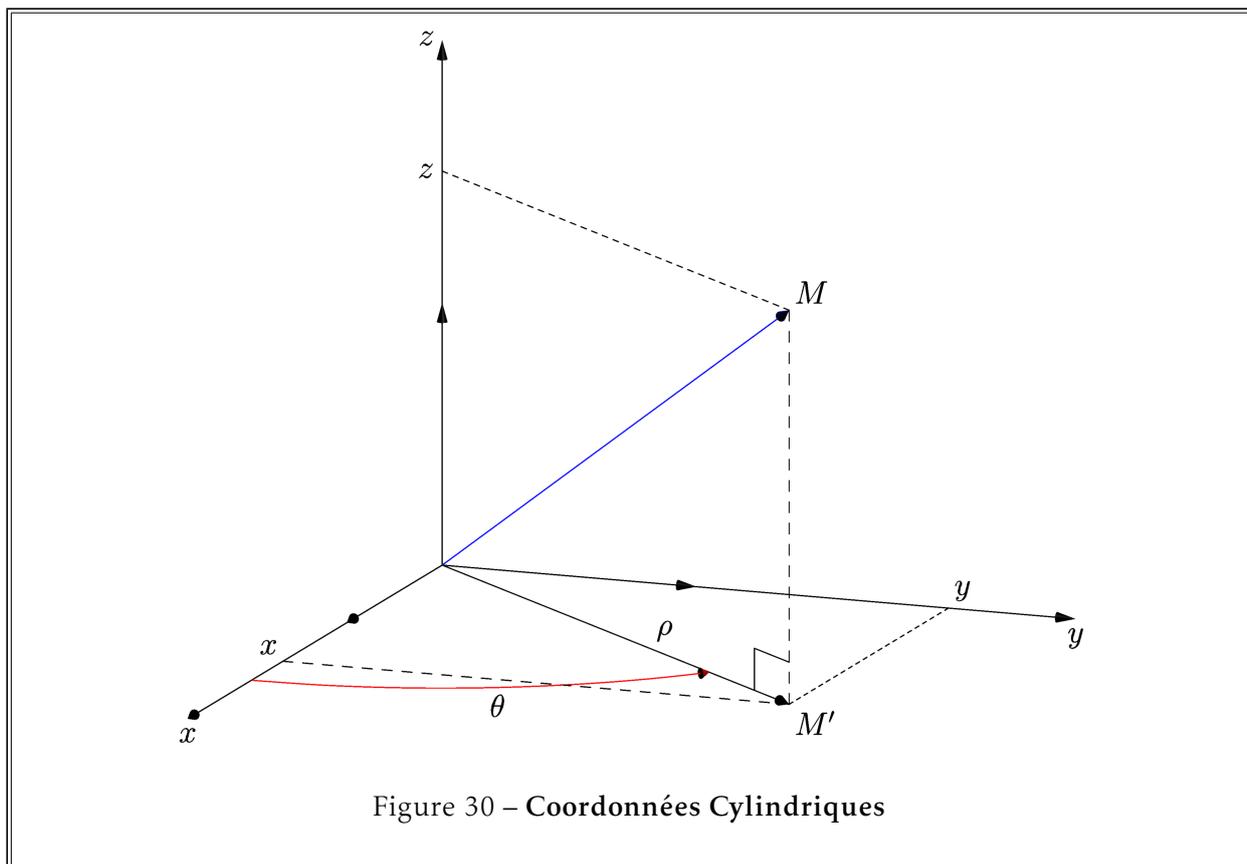
Elles sont décrites par les formules :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}, \text{ avec } \rho \geq 0 \text{ et } \theta \text{ décrivant un intervalle de longueur } 2\pi.$$

Les formules réciproques sont :  $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} + k\pi \\ z = z \end{cases}$ , avec  $k = 0$  si  $x > 0$  et  $k = 1$  si  $x < 0$ .

En fait, on utilise les polaires dans le plan  $xOy$ ,  $z$  étant inchangé.

Ceci est illustré sur la figure 30, page ci-contre.



### 32.3. Coordonnées sphériques

Elles sont décrites par les formules :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \cos \theta \\ y = \rho \cos \varphi \sin \theta \\ z = \rho \sin \varphi \end{cases}, \text{ avec } \rho \geq 0, \theta \text{ décrivant un intervalle de longueur } 2\pi \text{ et } \varphi \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Les formules réciproques sont :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} + k\pi \\ \varphi = \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}, \text{ avec } k = 0 \text{ si } x > 0 \text{ et } k = 1 \text{ si } x < 0.$$

Ceci est illustré sur la figure 31, page suivante.

### 32.4. Coordonnées sphériques des physiciens

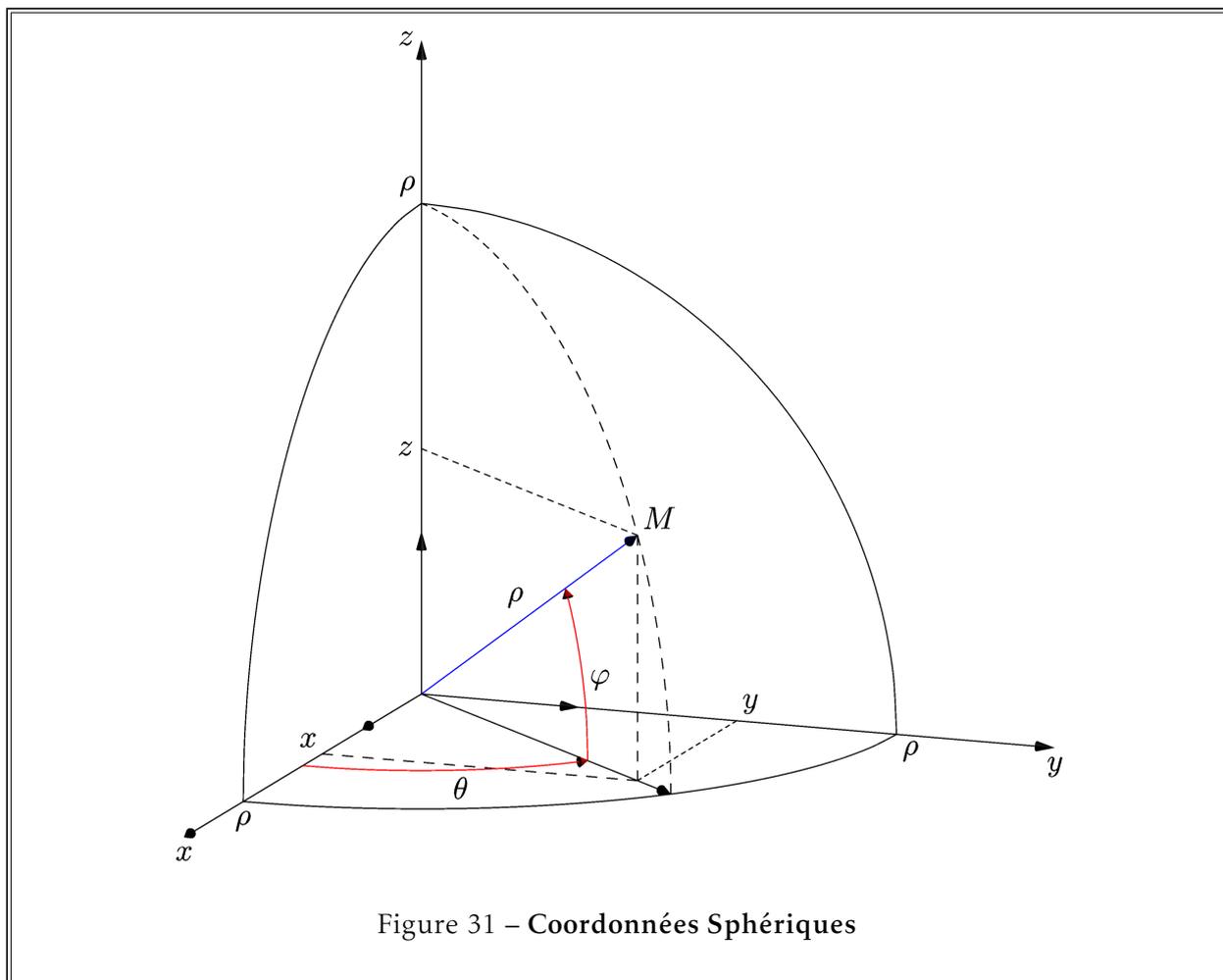
Elles sont décrites par les formules :

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}, \text{ avec } \rho \geq 0, \theta \text{ décrivant un intervalle de longueur } 2\pi \text{ et } \varphi \in [0, \pi].$$

Les formules réciproques sont :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} + k\pi \\ \theta = \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\pi}{2} \end{cases}, \text{ avec } k = 0 \text{ si } x > 0 \text{ et } k = 1 \text{ si } x < 0.$$

Ceci est illustré sur la figure 32, page 81.



### 33. Vecteurs du plan et de l'espace

#### 33.1. Produit scalaire

**Définition :** Le **produit scalaire** des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

L'étude générale de la notion de produit scalaire est page 24.

Dans un repère orthonormal :

- le produit scalaire dans le plan est défini par :  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x x' + y y'$

- le produit scalaire dans l'espace de  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = x x' + y y' + z z'$ .

#### 33.2. Produit vectoriel

**Définition :** Le **produit vectoriel** des vecteurs de l'espace  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est :  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$ .

On a :  $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \left| \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \right|$ ,

et : le vecteur  $\vec{w}$  est orthogonal à  $\vec{u}$  et à  $\vec{v}$ , de façon que le trièdre  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  soit direct.

Dans un repère orthonormal direct :

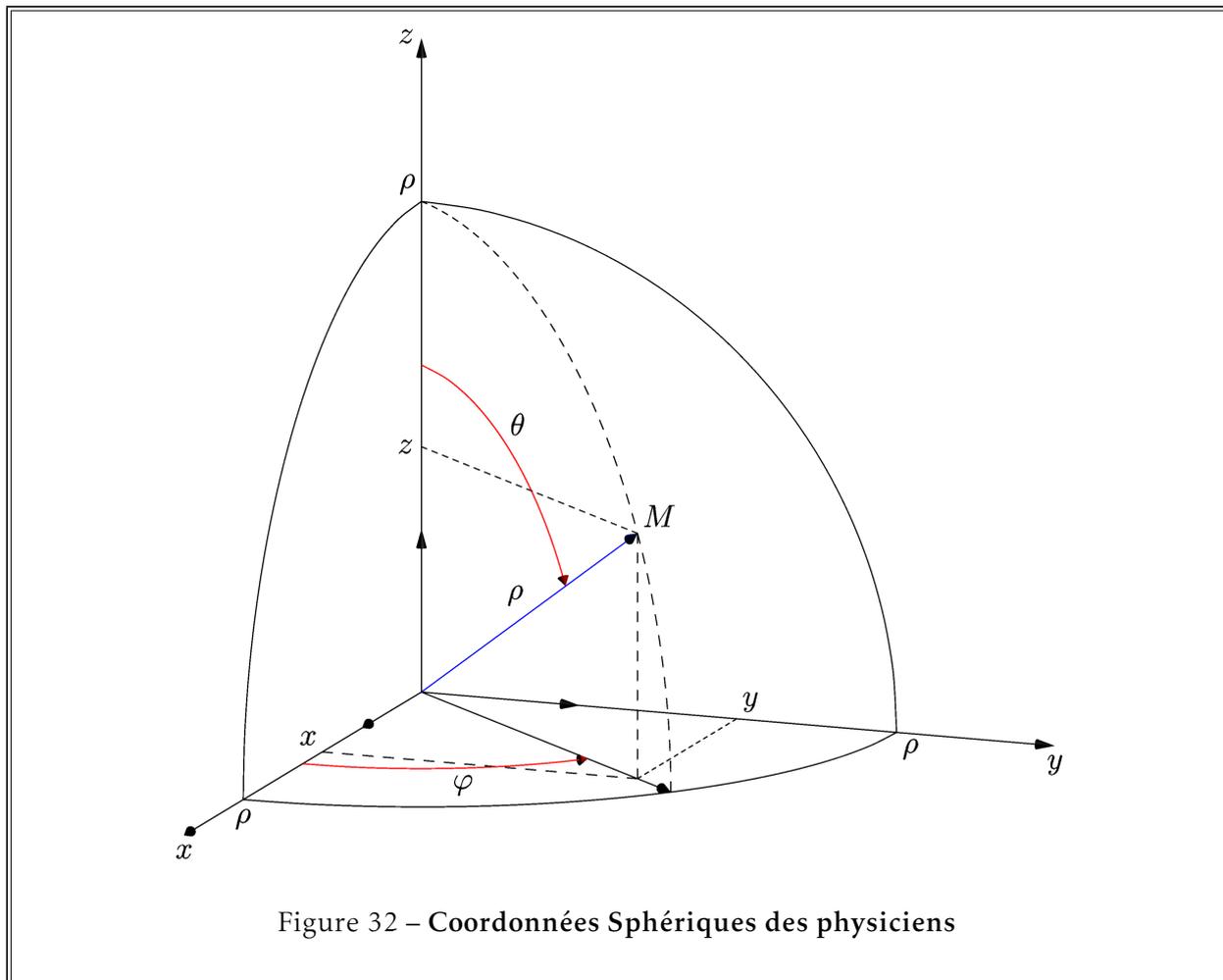


Figure 32 – Coordonnées Sphériques des physiciens

le produit vectoriel est défini par : 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}.$$

Le produit vectoriel n'est défini qu'en dimension 3.

### 33.3. Déterminants

**Définition :** Le **déterminant** des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est :  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

**Définition :** Le **déterminant** des vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  est :  $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$

L'étude générale des déterminants est page 22.

## 34. Droites et Plans affines

On travaille toujours ici dans un repère fixé, même si on ne le précise pas...

De plus, dès qu'il est question d'orthogonalité, de distance ou d'angle, ce repère est supposé **orthonormal**, sans, encore une fois, que cela soit précisé...

### 34.1. Droites du plan

a/ En coordonnées cartésiennes

La droite d'équation :  $ax + by + c = 0$ ,  $(a, b) \neq (0, 0)$ ,

est de vecteur directeur :  $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  et de vecteur normal :  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

La droite passant par :  $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  et de vecteur directeur  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$   $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ ,

est d'équation :  $\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0$

b/ En représentation paramétrique

La droite passant par  $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  et de vecteur directeur  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

est de représentation paramétrique :  $\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \end{cases}$

c/ Pour passer d'une représentation à une autre

- De paramétriques en cartésiennes : éliminer  $\lambda$  entre les deux équations.
- De cartésiennes en paramétriques :  $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}\lambda \end{cases}$  par exemple pour  $b \neq 0$ .

## 34.2. Plans de l'espace affine

a/ En coordonnées cartésiennes

Le plan d'équation :  $ax + by + cz + d = 0$ , est de vecteur normal :  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Le plan passant par  $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  et de vecteur normal  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

est d'équation :  $\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$ .

b/ En représentation paramétrique

Le plan passant par  $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  et de plan directeur engendré par  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$

est de représentation paramétrique :  $\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ y = y_0 + \lambda\beta + \mu\beta' \\ z = z_0 + \lambda\gamma + \mu\gamma' \end{cases}$

c/ Pour passer d'une représentation à une autre

- De paramétriques en cartésiennes :
  - éliminer  $\lambda$  et  $\mu$  entre les trois équations

ou bien directement l'équation est : 
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & \alpha & \alpha' \\ y-y_0 & \beta & \beta' \\ z-z_0 & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0$$

- De cartésiennes en paramétriques :

chercher un point  $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  du plan,

et chercher un vecteur  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$  non nul, normal à  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  par exemple  $\begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$  si  $(a, b) \neq (0, 0)$

Le produit vectoriel de ces deux vecteurs fournit un second vecteur :  $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$  qui convient.

### 34.3. Droites de l'espace affine

- Par intersection de 2 plans d'équations : 
$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Un vecteur directeur de la droite intersection de ces 2 plans est :  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$

- En paramétriques, la droite passant par  $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  et de vecteur directeur  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$  ( $\alpha, \beta, \gamma \neq (0, 0, 0)$ )

est de représentation paramétrique : 
$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases}$$

### 34.4. Angles

On travaille toujours dans un repère orthonormal direct.

- l'angle de 2 vecteurs ou de 2 droites ou de 2 plans vérifie :  $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$ , applicable avec les vecteurs directeurs des droites ou les vecteurs normaux des plans selon les cas.
- pour l'angle entre une droite et un plan, il faut appliquer la formule précédente avec un vecteur directeur de la droite et un vecteur normal au plan.  
Éventuellement le résultat est  $\frac{\pi}{2} - \theta$  selon la question exacte posée.

### 34.5. Aires et Volumes élémentaires

On travaille dans un repère orthonormal.

- Dans le plan, l'aire **géométrique** du triangle A, B, C est :  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \right|$

C'est bien la valeur absolue du déterminant ...

- Dans l'espace, l'aire **géométrique** du triangle A, B, C est :  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$

- Dans l'espace, le volume **géométrique** du parallélépipède construit sur  $(AB, AC, AD)$  est :

$$\mathcal{V} = \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \right|$$

L'aire algébrique dépend à chaque fois de l'orientation choisie.

### 34.6. Distances

On travaille toujours dans un repère orthonormal.

- La distance de  $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  à la droite d'équation  $ax + by + c = 0$ , est :  $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- La distance de  $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  au plan d'équation  $ax + by + cz + d = 0$ , est :  $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
- La distance de 2 droites non parallèles de l'espace :  $\begin{cases} D_1 : (A, \vec{u}) \\ D_2 : (B, \vec{v}) \end{cases}$  est :  $\frac{|\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$
- La distance d'un point  $M$  à une droite  $D : (A, \vec{u})$  est donnée par :  $\frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

## 35. Projecteurs et Symétries

Dans cette partie, on utilise la notion de sous-espaces vectoriels supplémentaires qui se trouve pages 15 et 17.

### 35.1. Projecteur

**Définition :** Un projecteur  $p$  d'un espace vectoriel  $E$  est un endomorphisme de  $E$  vérifiant :  $p \circ p = p$ .

**Théorème :** Soit  $p$  un projecteur de  $E$ , alors :  $E = \ker p \oplus \text{Im } p$ .

Réciproquement, si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ , alors, si  $x = x_F + x_G$ , avec  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ , on peut définir  $p$  par :  $p(x) = x_F$ .

$p$  est alors un projecteur de  $E$ . C'est le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ .

**Définition :** Une projection  $p$  d'un espace affine  $\mathcal{E}$  est une application affine de  $\mathcal{E}$  vérifiant :  $p \circ p = p$ .

L'endomorphisme associé à une projection affine est un projecteur vectoriel.

### 35.2. Symétrie

**Définition :** Une symétrie  $s$  d'un espace vectoriel  $E$  est un endomorphisme de  $E$  vérifiant :  $s \circ s = \text{Id}_E$ .

**Théorème :** Soit  $s$  une symétrie de  $E$ , alors  $p$  défini par :  $2p = s + \text{Id}_E$  est une symétrie. C'est la symétrie par rapport à  $E_1$ , l'ensemble des vecteurs invariants, parallèlement à  $E_{-1}$ , le sous-espace propre associé à la valeur propre  $-1$ .

Réciproquement, si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ , alors, si  $x = x_F + x_G$ , avec  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ , on peut définir  $s$  par :  $s(x) = x_F - x_G$ .

$s$  est alors une symétrie de  $E$ . C'est la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ .

**Définition :** Une symétrie  $s$  d'un espace affine  $\mathcal{E}$  est une application affine de  $\mathcal{E}$  vérifiant :  $s \circ s = \text{Id}_{\mathcal{E}}$ .

L'endomorphisme associé à une symétrie affine est une symétrie vectorielle.

## 36. Isométries

### 36.1. Isométries vectorielles et isométries affines

**Définition :** Une isométrie vectorielle  $\varphi$  de  $E$  est une application qui conserve la norme, c'est à dire :

$$\forall \vec{u} \in E, \quad \|\varphi(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|.$$

**Définition :** Une isométrie affine  $f$  de  $\mathcal{E}$  est une application qui conserve les distances, c'est à dire :

$$\forall A, B \in \mathcal{E}, \quad \|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$$

**Théorème :** Un endomorphisme est une isométrie vectorielle si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est orthogonale.

Les matrices orthogonales sont page 29.

**Théorème :** Une application affine est une isométrie affine si et seulement si l'application linéaire associée est une isométrie vectorielle.

### 36.2. Symétries orthogonales

**Théorème :** Une **isométrie vectorielle** est une symétrie orthogonale

⇔ Sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

La transformation est alors la symétrie orthogonale par rapport à l'ensemble des vecteurs invariants. On retrouve ces cas dans les paragraphes suivants.

**Théorème :** Une **isométrie affine** est une symétrie orthogonale

⇔ l'isométrie vectorielle associée est une isométrie vectorielle et il y a des points fixes.

La transformation est alors la symétrie orthogonale par rapport à l'ensemble des points fixes.

Dans le cas d'une symétrie orthogonale dans le plan ou l'espace **affine**, la matrice de l'isométrie vectorielle associée est encore orthogonale, mais on observera que ça n'est plus une condition suffisante. Il est nécessaire d'avoir des points fixes pour avoir une symétrie affine.

### 36.3. Recherche d'une symétrie orthogonale d'éléments géométriques donnés

#### a/ Isométrie vectorielle

On cherche les expressions de la symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle  $\Delta$  ou à un plan vectoriel  $\Pi$ .

On écrit que

- $\frac{\vec{u} + \vec{u}'}{2} \in \Delta$  ou  $\Pi$ , et,
- $\vec{u}' - \vec{u}$  appartient à l'orthogonal de  $\Delta$  ou  $\Pi$ .

#### b/ Isométrie affine

On cherche les expressions de la symétrie orthogonale par rapport à la droite  $D$  ou au plan  $P$ .

On écrit que

- le milieu du segment  $MM'$  appartient à  $D$  ou à  $P$ , et,
- $\overrightarrow{MM'}$  appartient à l'orthogonal de la direction de  $D$  ou  $P$ .

## 36.4. Identification des Isométries Vectorielles

### a/ symétries orthogonales

Si la matrice d'une isométrie vectorielle dans une base orthonormale est symétrique, l'isométrie vectorielle est une symétrie orthogonale.

C'est la symétrie orthogonale par rapport à l'ensemble des vecteurs invariants.

### b/ Isométries vectorielles du plan

Dans une base orthonormale, la matrice est orthogonale.

- Isométrie directe : le déterminant vaut 1.

C'est une rotation d'angle  $\theta$ . La matrice est : 
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Si  $\theta = 0$ , c'est l'identité, et si  $\theta = \pi$ , c'est « moins l'identité », la symétrie centrale.

- Isométrie indirecte : le déterminant vaut -1.

C'est une symétrie orthogonale par rapport à la droite  $D_{\frac{\theta}{2}}$  tournée de  $\frac{\theta}{2}$  par rapport à l'axe  $Ox$ .

La matrice est : 
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

### c/ Isométries vectorielles de l'espace

Dans une base orthonormale, la matrice est orthogonale.

- Isométrie directe : le déterminant vaut 1, le troisième vecteur est le produit vectoriel des 2 premiers.

C'est l'identité ou une rotation d'axe dirigé par un vecteur propre associé à 1 :  $\vec{e}_1$  et d'angle  $\theta$ .

On trouve  $\theta$ ,

- en cherchant  $\cos \theta$  par la trace qui vaut  $1 + 2 \cos \theta$
- en cherchant le signe de  $\sin \theta$  qui est celui de  $\det(\vec{e}_1, \vec{u}, f(\vec{u}))$ ,  
avec  $\vec{u}$ , un vecteur quelconque, non colinéaire à  $\vec{e}_1$ .

Si  $\theta = 0$ , c'est l'identité, et si  $\theta = \pi$ , c'est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe. Cette isométrie a, en principe, déjà été identifiée comme symétrie orthogonale.

- Isométrie indirecte : le déterminant vaut -1, le troisième vecteur est l'opposé du produit vectoriel des 2 premiers.

On cherche la trace :

- La trace vaut 1, ce qui revient à ce que 1 soit valeur propre.  
C'est une symétrie orthogonale par rapport au plan propre pour la valeur propre 1.
- La trace ne vaut pas 1, 1 n'est pas valeur propre, elle vaut  $-1 + 2 \cos \theta$ .  
C'est la composée
  - ◊ d'une rotation d'angle  $\theta$  et d'axe dirigé par un vecteur propre associé à la valeur propre -1 et
  - ◊ d'une symétrie par rapport au plan orthogonal à l'axe de la rotation.

Le signe de  $\sin \theta$  se trouve comme dans le cas d'une isométrie directe.

## 36.5. Identification des Isométries Affines

L'isométrie vectorielle associée s'obtient en « éliminant » les constantes. On regarde si cette isométrie vectorielle n'est pas une symétrie orthogonale.

On cherche ensuite les points fixes de l'isométrie affine.

### a/ Isométries affines planes

- Il y a un ou plusieurs point fixes.  
L'isométrie a la même « description géométrique » que l'isométrie vectorielle associée, « recentrée » en un point fixe.
- Il n'y a pas de points fixes.  
L'isométrie vectorielle associée est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle  $\Delta$ .

L'isométrie affine est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite  $D$  de direction  $\Delta$  et d'une translation de vecteur  $\vec{u}$ .

On trouve  $D$  et le vecteur de la translation en cherchant les points  $M$  tels que  $\overrightarrow{MM'} \in \Delta$ .

On a alors :  $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$

#### b/ Isométries affines de l'espace

- Il y a un ou plusieurs point fixes.

L'isométrie a la même « description géométrique » que l'isométrie vectorielle associée, « recentrée » en un point fixe.

- Il n'y a pas de points fixes.

- Isométrie directe : l'isométrie vectorielle associée est une rotation vectorielle.

L'isométrie affine est un vissage. L'axe et le vecteur de translation sont donnés en cherchant les points  $M$  tels que  $\overrightarrow{MM'}$  appartient à l'axe de la rotation vectorielle associée.

- Isométrie indirecte :

L'isométrie vectorielle associée est une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel  $\Pi$

L'isométrie affine est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan  $P$  de direction  $\Pi$  et d'une translation de vecteur  $\vec{u}$ .

On trouve  $P$  et le vecteur de la translation en cherchant les points  $M$  tels que  $\overrightarrow{MM'} \in \Pi$

On a alors :  $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$

## 37. Similitudes directes

### 37.1. Similitude directe

**Définition :** Une similitude directe est une transformation du plan affine qui, en complexes, se met sous la forme :

$$z \mapsto az + b.$$

On peut aussi se reporter page 13.

### 37.2. Identification

On cherche d'abord si il y a un point fixe en résolvant :  $z = az + b$ .

- Si tous les points sont fixes, c'est l'identité.
- Si il n'y a pas de point fixe, alors, c'est que  $a = 1$  et  $b \neq 0$ , c'est la translation de vecteur d'affixe  $b$ .
- Si il y a un unique point fixe  $\Omega$ , d'affixe la solution de :  $z = az + b$ , dans le repère centré sur  $\Omega$ , la transformation s'écrit :  $Z \mapsto aZ$ .
  - Si  $|a| = 1$ , alors  $a = e^{i\theta}$ , c'est la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\theta$ .
  - Sinon,  $a = |a|e^{i\theta}$ , c'est la composée de la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\theta$  et de l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $|a|$ .

## 38. Courbes Planes

### 38.1. Etude et Tracé de Courbes d'équation $y = f(x)$

#### a/ Ensemble d'étude

On recherche l'ensemble de définition, les éventuelles parité ou imparité, la périodicité, pour aboutir à l'ensemble d'étude. On indiquera alors les transformations à appliquer à l'arc de courbe pour reconstituer la courbe entière.

#### b/ Etude des variations

L'étude des variations se fait le plus souvent en étudiant le signe de la dérivée, obtenu en utilisant au besoin une fonction auxiliaire.

Pour le choix d'une fonction auxiliaire, il faut dans celle ci « isoler » les éventuels

- logarithmes,
- et arctangentes

qui se transforment en fraction rationnelle quand on dérive.

#### c/ Limites aux bornes

On cherche les limites à toutes les bornes de l'ensemble d'étude, avec au besoin,

- l'étude du prolongement par continuité en cas de limite finie,
- et l'étude locale de la dérivabilité en ces points, pour placer la tangente.

#### d/ Points d'inflexions

L'étude des inflexions se fait au moyen de la dérivée seconde :  $f''(x_0) = 0$  caractérisent les points où il peut y avoir une inflexion géométrique.

Cette étude n'est faite qu'à la demande de l'énoncé.

Géométriquement, un point d'inflexion se caractérise par le fait que la courbe traverse sa tangente.

#### e/ Branches infinies

On a une branche infinie quand :  $f(x) \rightarrow \pm\infty$  ou  $x \rightarrow \pm\infty$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ , on a une asymptote verticale d'équation :  $x = x_0$ .
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ , on a une asymptote horizontale d'équation :  $y = b$ .
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Il faut continuer la recherche par :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

- si  $a = \pm\infty$ , on a une branche parabolique de direction  $Oy$ .
- si  $a = 0$ , on a une branche parabolique de direction  $Ox$ .
- si  $a$  est fini non nul, il faut continuer la recherche par :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b$ 
  - si  $b$  est fini, on a une asymptote :  $y = ax + b$
  - si  $b$  est infini, on a une branche parabolique de direction  $y = ax$
  - si  $b$  n'a pas de limite, on a une branche infinie de direction asymptotique  $y = ax$

#### f/ Centre de symétrie

- Quand  $f$  est impaire, l'origine est centre de symétrie de la courbe représentative de  $f$ .
- Le point de coordonnées  $(a, b)$  est centre de symétrie de la courbe si et seulement si  $f(x) + f(2a - x)$  est constant, il vaut alors  $2b$ .

#### g/ Convexité

Une fonction 2 fois dérivable est convexe si et seulement si la dérivée seconde est positive.

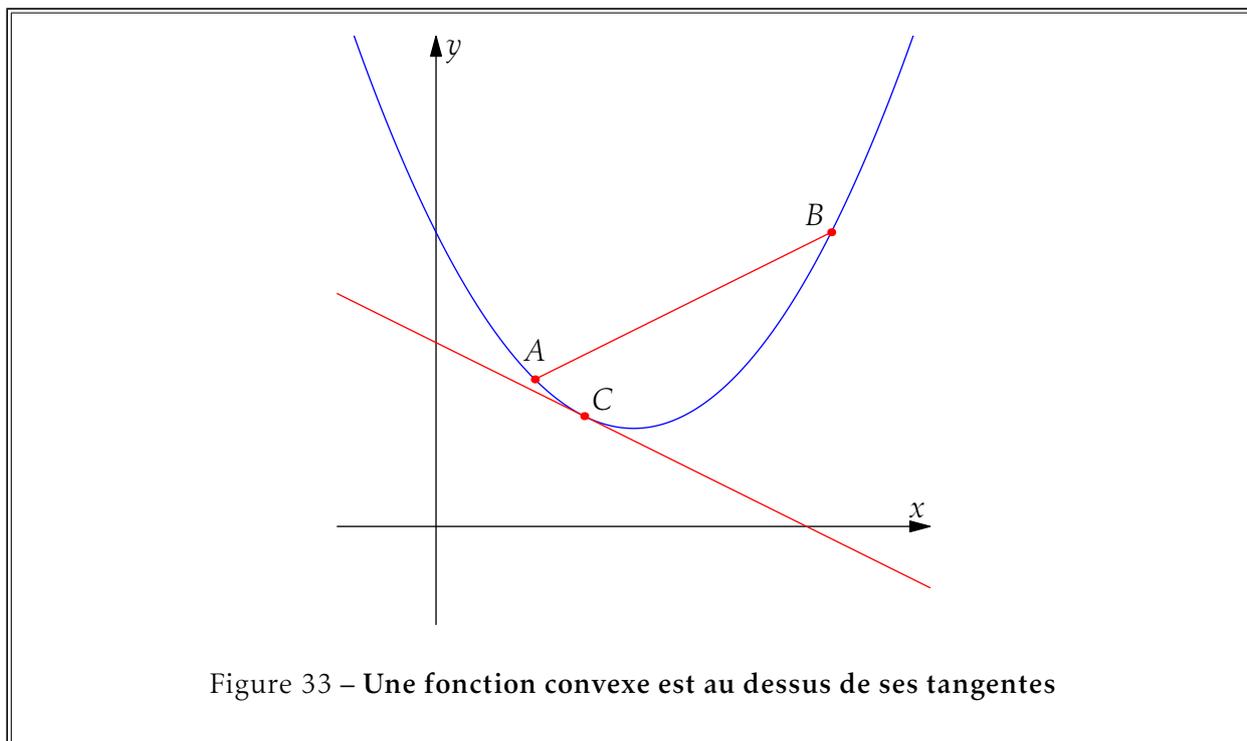
Géométriquement, une courbe est convexe si et seulement si elle est au dessus de chacune de ses tangentes.

Une fonction convexe a sa concavité (« l'intérieur ») tournée vers le haut et une fonction concave a sa concavité tournée vers le bas.

La figure 33, page suivante, illustre la convexité.

### 38.2. Courbes planes en paramétriques

$$\text{On a : } \begin{cases} x = f(t) = x(t) \\ y = g(t) = y(t) \end{cases}$$



#### a/ Interprétation cinématique

Si on considère que  $t$  est le « temps », on peut considérer qu'on étudie le déplacement d'un « mobile » dans le plan (ou l'espace).

On utilise alors le vocabulaire suivant :

- la courbe est la **trajectoire** du mobile :
- le vecteur dérivé  $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$  est le **vecteur vitesse** du mobile, sa norme est sa **vitesse**.
- le vecteur dérivé seconde  $\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$  est le **vecteur accélération** du mobile, sa norme est son **accélération**.

#### b/ Ensemble d'étude

On recherche les ensembles de définition, les éventuelles parité ou imparité, les périodicités, pour aboutir à l'ensemble d'étude. On indiquera alors les transformations à appliquer à l'arc de courbe pour reconstituer la courbe entière.

#### c/ Variations

On étudie les variations de  $f$  et  $g$ .

Il faut construire le tableau de variation, qui contient les lignes  $x'(t)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $y'(t)$  et  $\frac{y'(t)}{x'(t)}$  qui représente la pente de la tangente.

Remarquons que si  $\frac{y'(t)}{x'(t)}$  est une forme indéterminée en un point, on peut la remplacer par sa limite qui représente encore la pente de la tangente.

#### d/ Points stationnaires

Les points stationnaires vérifient : 
$$\begin{cases} x'(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$$

On appelle alors :

- $p$ , avec  $p \geq 1$ , le premier rang où  $\begin{pmatrix} x^{(p)}(t_0) \\ y^{(p)}(t_0) \end{pmatrix}$  est non nul, ce vecteur est alors tangent à la courbe.
- $q$ , avec  $q > p$ , le premier rang où  $\begin{pmatrix} x^{(q)}(t_0) \\ y^{(q)}(t_0) \end{pmatrix}$  est non colinéaire à  $\begin{pmatrix} x^{(p)}(t_0) \\ y^{(p)}(t_0) \end{pmatrix}$

La courbe est toujours tangente à  $\overrightarrow{F^{(p)}(t_0)}$ ,  
 la parité de  $p$  donne le signe de la coordonnée lorsque  $t < t_0$ ,  
 la parité de  $q$  donne dans ce cas le signe de la deuxième coordonnée.

Dans les figures suivantes, le repère tracé est :  $\left( M_0, \overrightarrow{F^{(p)}(t_0)}, \overrightarrow{F^{(q)}(t_0)} \right)$ .

On peut voir sur la figure 34, ci-dessous, l'ensemble des cas.

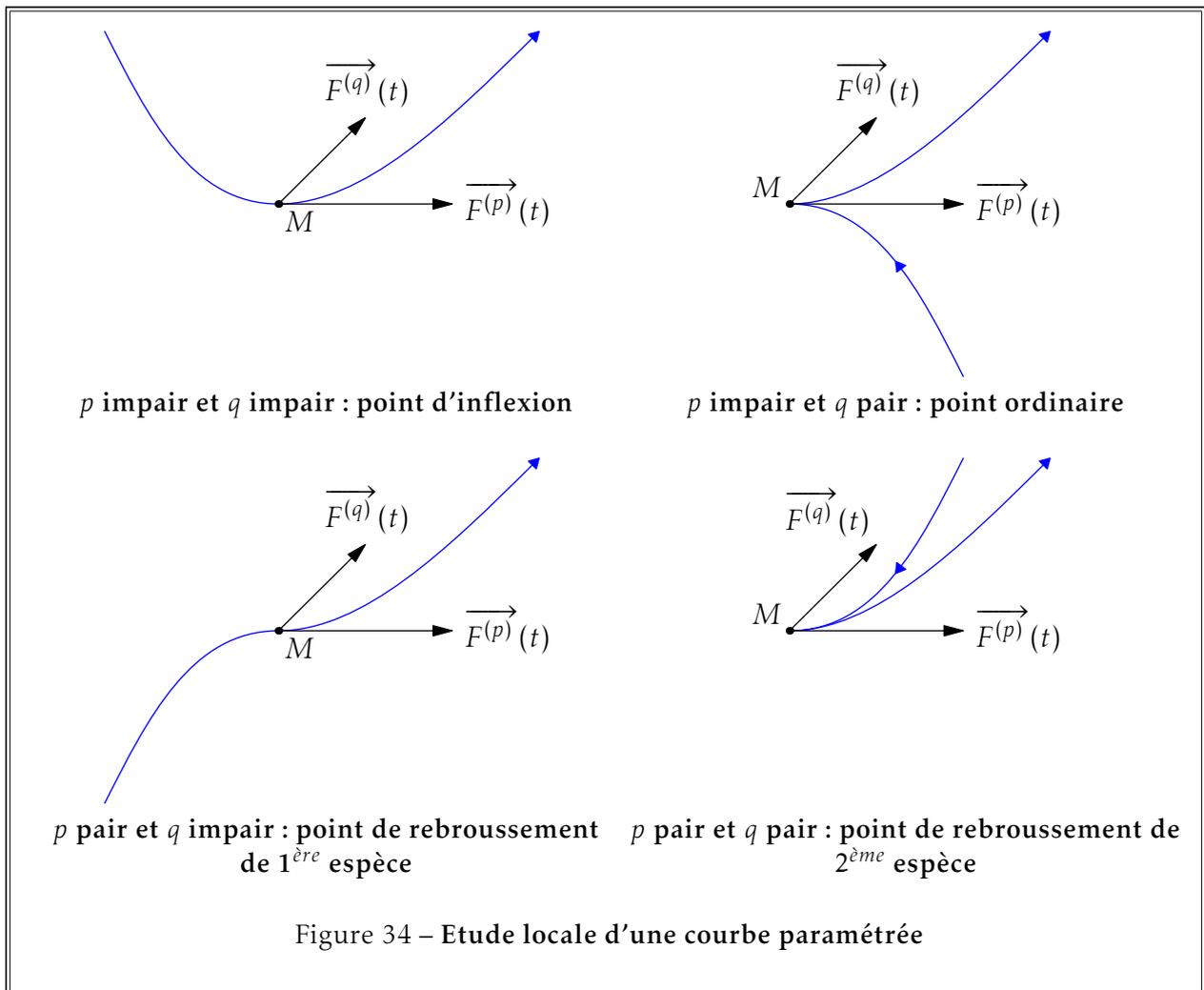


Figure 34 – Etude locale d'une courbe paramétrée

Remarquons que si la tangente est verticale ou horizontale, le calcul de  $q$  est inutile, les variations permettent alors de déterminer directement la nature du point.

#### e/ Points d'inflexion

Les points d'inflexion géométrique vérifient nécessairement :  $\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = 0$ .

On ne fait cette étude qu'à la demande de l'énoncé.

#### f/ Branches infinies

L'étude des branches infinies ne pose de problème qu'au cas où  $f$  et  $g$  tendent vers l'infini.

- Si  $y(t) \rightarrow \pm\infty$ , et  $x(t) \rightarrow l$ , quand  $t \rightarrow t_0$  : on a une asymptote verticale d'équation  $x = l$ .

- Si  $x(t) \rightarrow \pm\infty$ , et  $y(t) \rightarrow l$ , quand  $t \rightarrow t_0$  : on a une asymptote horizontale d'équation  $y = l$ .
- Si  $x(t)$  et  $y(t) \rightarrow \pm\infty$ , quand  $t \rightarrow t_0$ , on calcule  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$  appelée  $a$  :
  - si il n'y a pas de limite, on ne dit rien de plus,
  - si  $a = \pm\infty$ , on a une branche parabolique de direction  $Oy$ ,
  - si  $a = 0$ , on a une branche parabolique de direction  $Ox$ ,
  - dans les autres cas, on calcule  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) - ax(t)$  appelée  $b$  :
    - ◊ si il n'y a pas de limite, on a une branche infinie de direction asymptotique  $y = ax$
    - ◊ si  $b = \pm\infty$ , on a une branche parabolique de direction  $y = ax$
    - ◊ dans les autres cas, on a une asymptote  $y = ax + b$

### 38.3. Courbes planes en polaires

Il s'agit d'étudier les courbes définies en coordonnées polaires par :  $\rho = f(\theta) = \rho(\theta)$

#### a/ Ensemble d'étude

On cherche l'ensemble de définition, la périodicité éventuelle, on obtient un premier intervalle : celui-ci doit être un multiple de la période et de  $2\pi$ .

On cherche ensuite à réduire cet intervalle.

On essaye de comparer  $\rho(\theta)$  à :  $\rho(-\theta)$  ;  $\rho(\theta + \pi)$  ;  $\rho(\pi - \theta)$  et  $\rho(\frac{\pi}{2} - \theta)$ .

On en déduit l'ensemble d'étude et d'éventuelles symétries de la courbe.

#### b/ Variations

On ne fait l'étude des variations de  $\rho$  par le signe de  $\rho'$  que si **si cette étude est simple !**

On peut très bien s'en passer pour tracer la courbe.

#### c/ Signe de $\rho$

L'étude du signe de  $\rho$  est par contre **indispensable**.

Elle qui figure dans le tableau de « variations » et permet de déterminer dans quel cadran on trace la courbe.

Notons bien que, dans l'étude des courbes en polaires,  $\rho$  peut être **négatif**, alors que dans les intégrales doubles en polaires ou triples en cylindriques et sphériques,  $\rho$  doit être positif.

Un point peut donc être repéré par le couple  $(\rho, \theta)$  ou le couple  $(-\rho, \theta + \pi)$ .

La figure 35, page suivante, montre un exemple de  $\rho$  négatif.

#### d/ Tangentes

On étudie la tangente en quelques points particuliers, en utilisant :  $\tan V = \frac{\rho}{\rho'}$ , qui fournit l'angle, orienté, entre le rayon vecteur et la tangente.

En un point où  $\rho(\theta_0) = 0$ , la tangente à la courbe est toujours la droite :  $\theta = \theta_0$ .

La figure 36, page suivante, précisent les angles utilisés.

La construction est la même quand  $\rho$  est négatif, comme on le voit sur la figure 37, page suivante

#### e/ Etude cinématique : vecteurs vitesse et accélération

Si le paramètre  $t$  représente le « temps », et si  $\theta$  dépend de  $t$ , alors, en utilisant les notations des physiciens :

$$\overrightarrow{OM} = \rho(\theta) \overrightarrow{u_r} \quad \text{et on a :} \quad \frac{d\overrightarrow{u_r}}{d\theta} = \overrightarrow{u_\theta}.$$

On a alors :

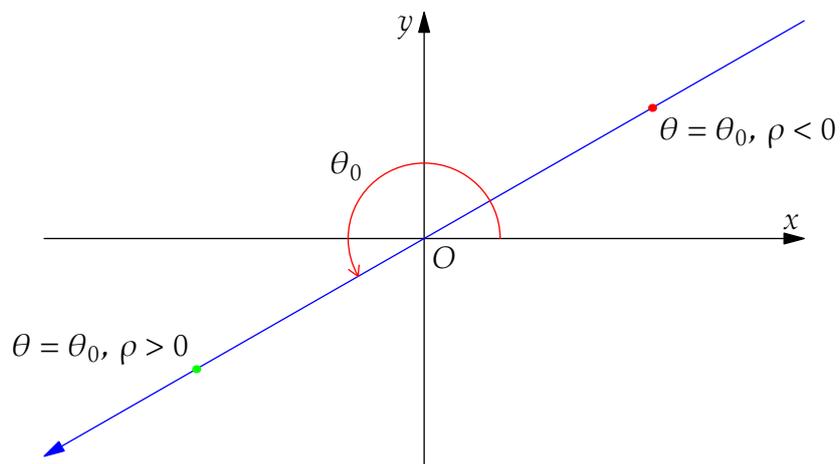


Figure 35 – Exemple où :  $\theta = 7\pi/6$ ,  $\rho < 0$  et  $\rho > 0$

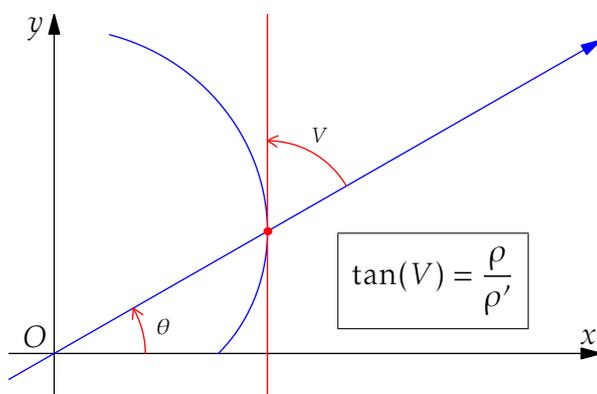


Figure 36 – Tangente en polaires

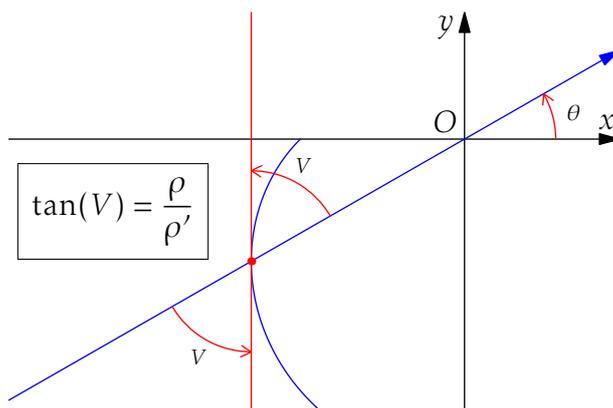


Figure 37 – Tangente en polaires,  $\rho$  négatif

- pour une courbe de classe  $\mathcal{C}^1$ , le vecteur « vitesse » à l'instant  $t$  est :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \left( \rho'(\theta) \vec{u}_r + \rho(\theta) \vec{u}_\theta \right) \frac{d\theta}{dt} ;$$

- pour une courbe de classe  $\mathcal{C}^2$ , le vecteur « accélération » à l'instant  $t$  est :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = \left( \rho'(\theta) \overrightarrow{u_r} + \rho(\theta) \overrightarrow{u_\theta} \right) \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \left( \left( \rho''(\theta) - \rho(\theta) \right) \overrightarrow{u_r} + 2\rho'(\theta) \overrightarrow{u_\theta} \right) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2.$$

### 38.4. Courbes usuelles en polaires

- On a les coniques d'équation  $\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$   
Voir page 95, l'étude générale des coniques.
- $\rho = \frac{A}{\cos(\theta - \theta_0)}$  est une droite  $\Delta$
- $\rho = A \cos(\theta - \theta_0)$  est le cercle passant par O de diamètre A et de centre sur la droite  $\theta = \theta_0$

## 39. Surfaces : Généralités

### 39.1. Surfaces, plan tangent

Une surface peut être définie par une équation cartésienne :  $F(x, y, z) = 0$

ou sous forme de nappe paramétrée :

$$\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \\ z = h(u, v) \end{cases}$$

On passe d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne en éliminant les 2 paramètres entre les 3 équations. On obtient l'équation d'une surface qui contient la nappe paramétrée. Pour savoir si on a ajouté des points, il faut chercher si pour un point de la surface on peut retrouver les valeurs des paramètres qui correspondent à ce point.

#### a/ Plan tangent à une surface définie en cartésiennes

Pour le plan tangent à (S) d'équation :  $F(x, y, z) = 0$  en  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ , on se place dans le cas où F est de classe  $\mathcal{C}^1$  au moins.

Le vecteur  $\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$  est normal à la surface (repère orthonormal), si ce vecteur est non nul, le

plan tangent est donc d'équation :  $(X - x_0) \frac{\partial F}{\partial x} + (Y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y} + (Z - z_0) \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$

#### b/ Plan tangent à une nappe paramétrée

Pour le plan tangent à la nappe paramétrée :  $\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \\ z = h(u, v) \end{cases}$  en  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  correspondant à  $(u_0, v_0)$ , on se place dans le cas où  $f, g, h$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  au moins.

S'ils forment une famille libre,

les vecteurs :  $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial h}{\partial u}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial h}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$  définissent la direction du plan tangent.

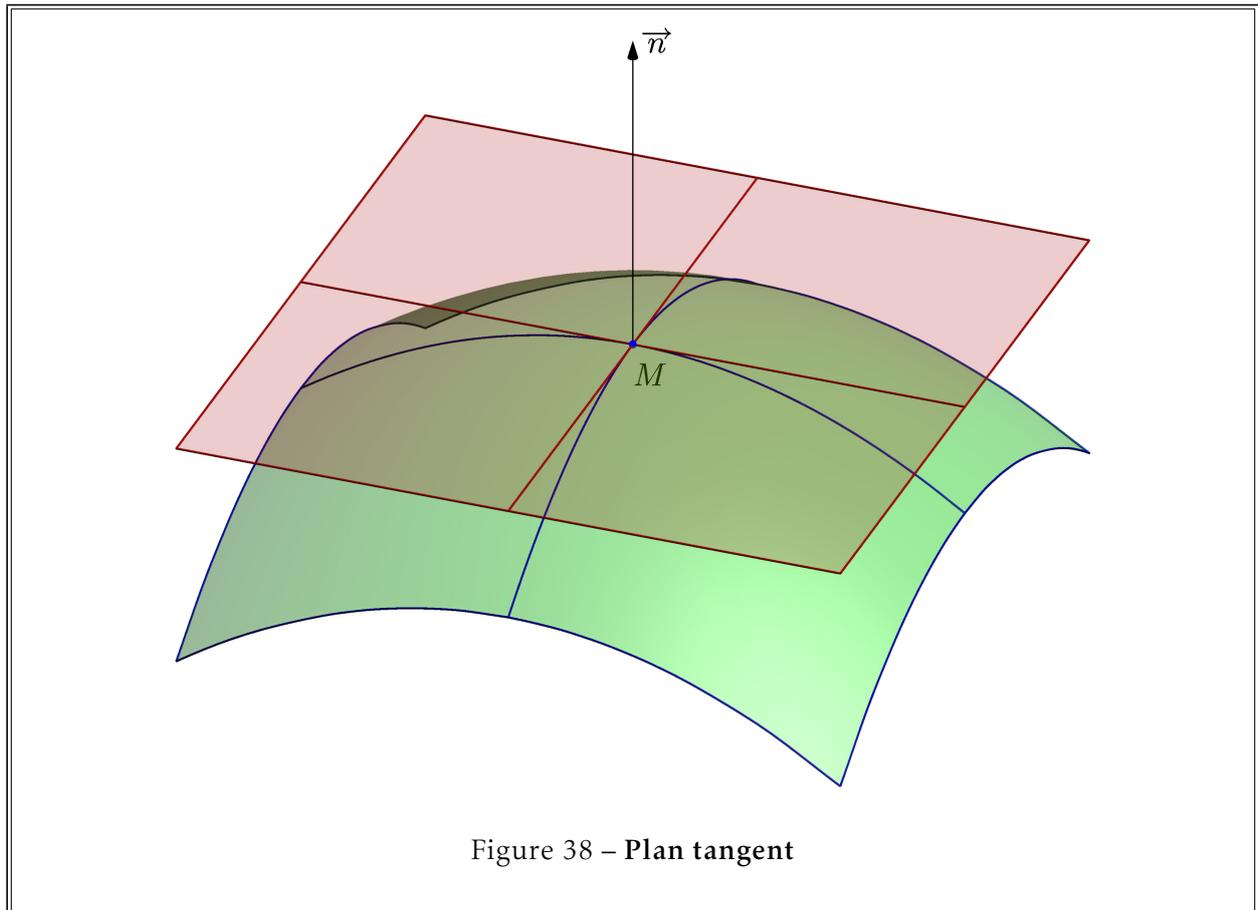
Le plan tangent est donc alors normal au produit vectoriel :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial u} \\ \frac{\partial h}{\partial u} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Si ce produit vectoriel n'est pas nul, le plan tangent est donc d'équation :

$$\begin{vmatrix} (X - x_0) & \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ (Y - y_0) & \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ (Z - z_0) & \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$$

Le plan tangent à une surface est visualisé figure 38, ci-dessous.



### 39.2. Tangente à une courbe de l'espace

Une courbe de l'espace peut être définie par une intersection de surfaces :

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

ou sous forme de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = f(u) \\ y = g(u) \\ z = h(u) \end{cases}$$

- Dans le cas d'une intersection de surfaces, l'intersection des plans tangents, si elle est une droite, est la tangente à la courbe au point considéré.

- Dans le cas d'une représentation paramétrique, le vecteur  $\begin{pmatrix} f'(u_0) \\ g'(u_0) \\ h'(u_0) \end{pmatrix}$ , s'il est non nul, dirige la tan-

gente qui est donc de représentation paramétrique 
$$\begin{cases} X = x_0 + \lambda f'(u_0) \\ Y = y_0 + \lambda g'(u_0) \\ Z = z_0 + \lambda h'(u_0) \end{cases}$$

## 40. Cercles et Sphères

On travaille toujours dans un repère orthonormal.

### 40.1. Cercles dans le plan et sphères

a/ Cercles dans le plan

- Le cercle de centre  $\Omega : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  et de rayon  $R$  est d'équation :  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
- Le cercle de diamètre  $AB$  est d'équation :  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

b/ Sphères dans l'espace

- La sphère de centre  $\Omega : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  et de rayon  $R$  est d'équation :  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$
- La sphère de diamètre  $AB$  est d'équation :  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

### 40.2. Cocyclicité

**Théorème :** (Angle au centre)

$$A, B \text{ et } C \text{ distincts appartiennent à un même cercle de centre } \Omega \Leftrightarrow \left| \widehat{(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})} \right| = 2 \left| \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} \right|$$

**Théorème :**  $A, B, C$  et  $D$  distincts sont cocycliques ou alignés  $\Leftrightarrow \widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})} =_{[\pi]} \widehat{(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BD})}$

**Théorème :** Si  $a, b, c, d$  sont les affixes de  $A, B, C, D$  distincts dans le plan complexe,

$$A, B, C \text{ et } D \text{ appartiennent à un même cercle ou sont alignés} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) =_{[\pi]} \arg\left(\frac{d-b}{d-a}\right)$$

### 40.3. Cercles dans l'espace.

Le plus souvent, un cercle dans l'espace est donné par l'intersection d'une sphère et d'un plan. Cette intersection est un cercle, un point ou vide selon la distance du centre de la sphère au plan. On appelle **axe du cercle** la droite perpendiculaire au plan passant par le centre de la sphère.

L'intersection de deux sphères, selon la distance des centres par rapport à la somme des rayons, est aussi un cercle, un point ou vide.

## 41. Coniques

Une conique, éventuellement dégénérée, est une courbe plane ayant pour équation cartésienne  $P(x, y) = 0$  avec  $P(x, y)$  un polynôme du second degré.

## 41.1. Ellipses

### a/ Équation réduite centrée

C'est :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- $a$  et  $b$ , avec  $a > b > 0$ , sont les longueurs des demi-grand axe et demi-petit axe.  
Les foyers sont alors sur  $Ox$ .

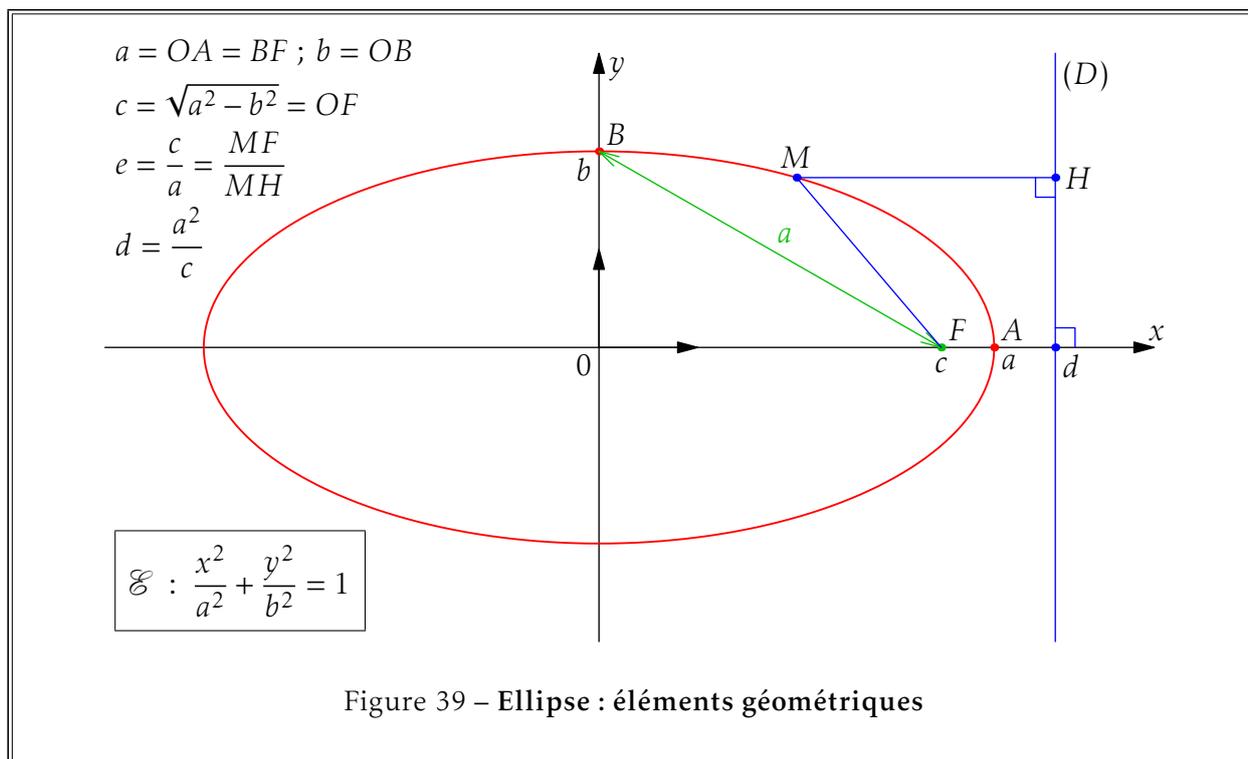
- $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ , est la distance du centre aux foyers.

- $e = \frac{c}{a} = \frac{MF}{MH} < 1$ , est l'excentricité.

- $\frac{a^2}{c}$  est la distance du foyer  $F$  à la directrice  $(D)$ .

- Le paramètre  $p$  de l'ellipse, qui intervient en coordonnées polaires est :  $p = \frac{b^2}{a} = ed$ , où  $d$  est la distance du foyer à la directrice correspondante.

Les éléments de l'ellipse sont précisés figure 39, ci-dessous.



### b/ Equation par foyer F et directrice D

C'est :  $\frac{MF}{MH} = e$ , avec  $e < 1$

### c/ Détermination bifocale

**Théorème :** L'ensemble des points  $M$  du plan vérifiant :  $MF + MF' = 2a$ , avec  $F$  et  $F'$  deux points et  $a$  une longueur est une ellipse de foyers  $F$  et  $F'$ , et de demi grand axe de longueur  $a$ .

### d/ Equation en coordonnées polaires

On a :  $\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ , un des foyers  $F$  étant à l'origine

- $p$  est le paramètre de l'ellipse,  $e$  est l'excentricité

- l'axe focal est  $Ox$

- On trouve les autres paramètres en écrivant  $\rho(0) + \rho(\pi) = 2a$  qui donne  $a = \frac{p}{1 - e^2}$

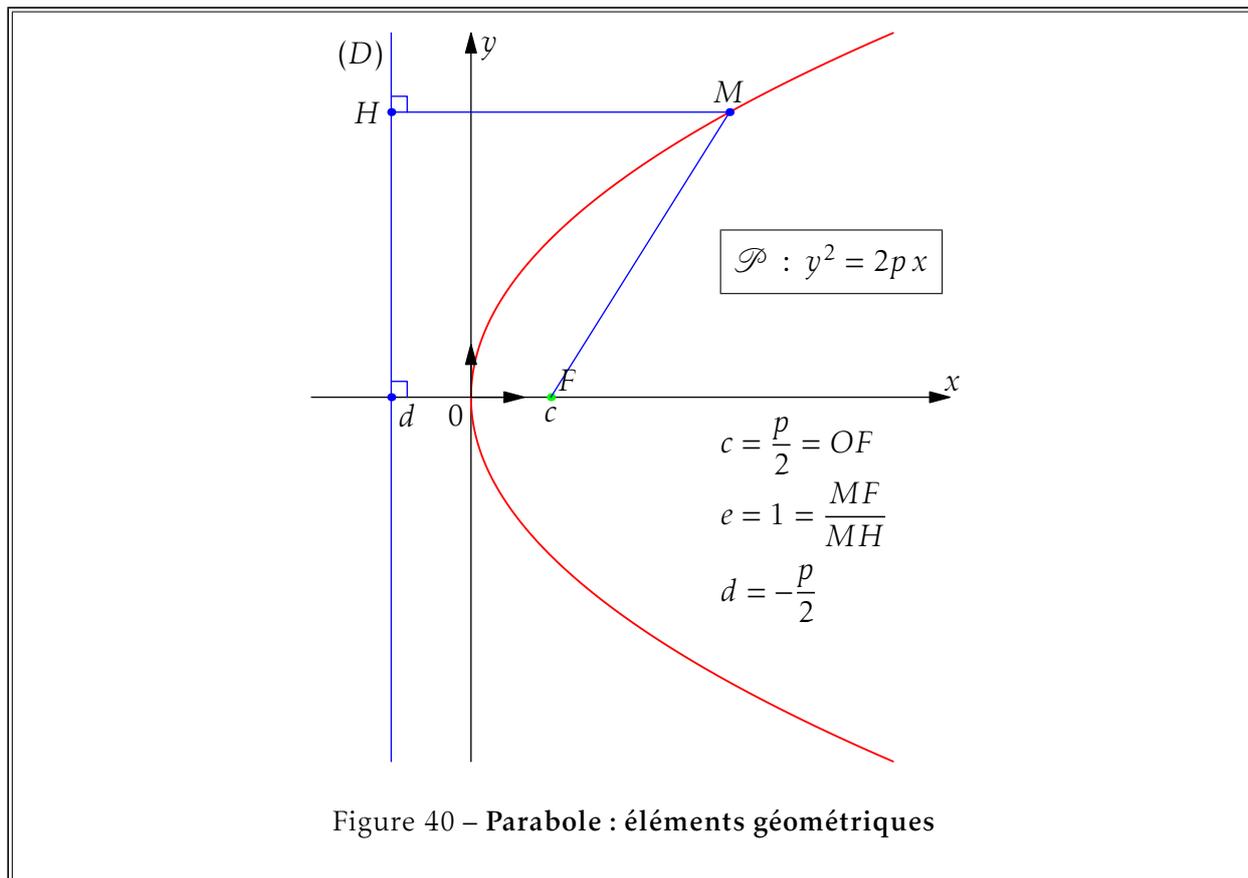
## 41.2. Paraboles

### a/ Équation réduite

C'est :  $y^2 = 2px$ , avec  $p > 0$ , le paramètre

- $p$  est le paramètre de la parabole.
- $O$  est le sommet et  $Ox$  l'axe de symétrie.
- L'excentricité  $e = \frac{MF}{MH}$  vaut 1 et l'unique foyer  $F$  est à la distance  $\frac{p}{2}$  du sommet sur l'axe de symétrie.
- La directrice  $(D)$  est aussi à la distance  $\frac{p}{2}$  du sommet, perpendiculaire à l'axe de symétrie.

Les éléments de la parabole sont précisés figure 40, ci-dessous.



### b/ Equation par foyer F et directrice D

C'est :  $\frac{MF}{MH} = e = 1$ , la distance du foyer à la directrice est  $p$ .

### c/ Equation en coordonnées polaires

On a :  $\rho = \frac{p}{1 + \cos \theta}$ , le foyer  $F$  étant à l'origine.

- $p$  est le paramètre de la parabole, distance du foyer à la directrice,
- l'axe de symétrie est  $Ox$  et contient le foyer.

## 41.3. Hyperboles

### a/ Équation réduite centrée

C'est :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

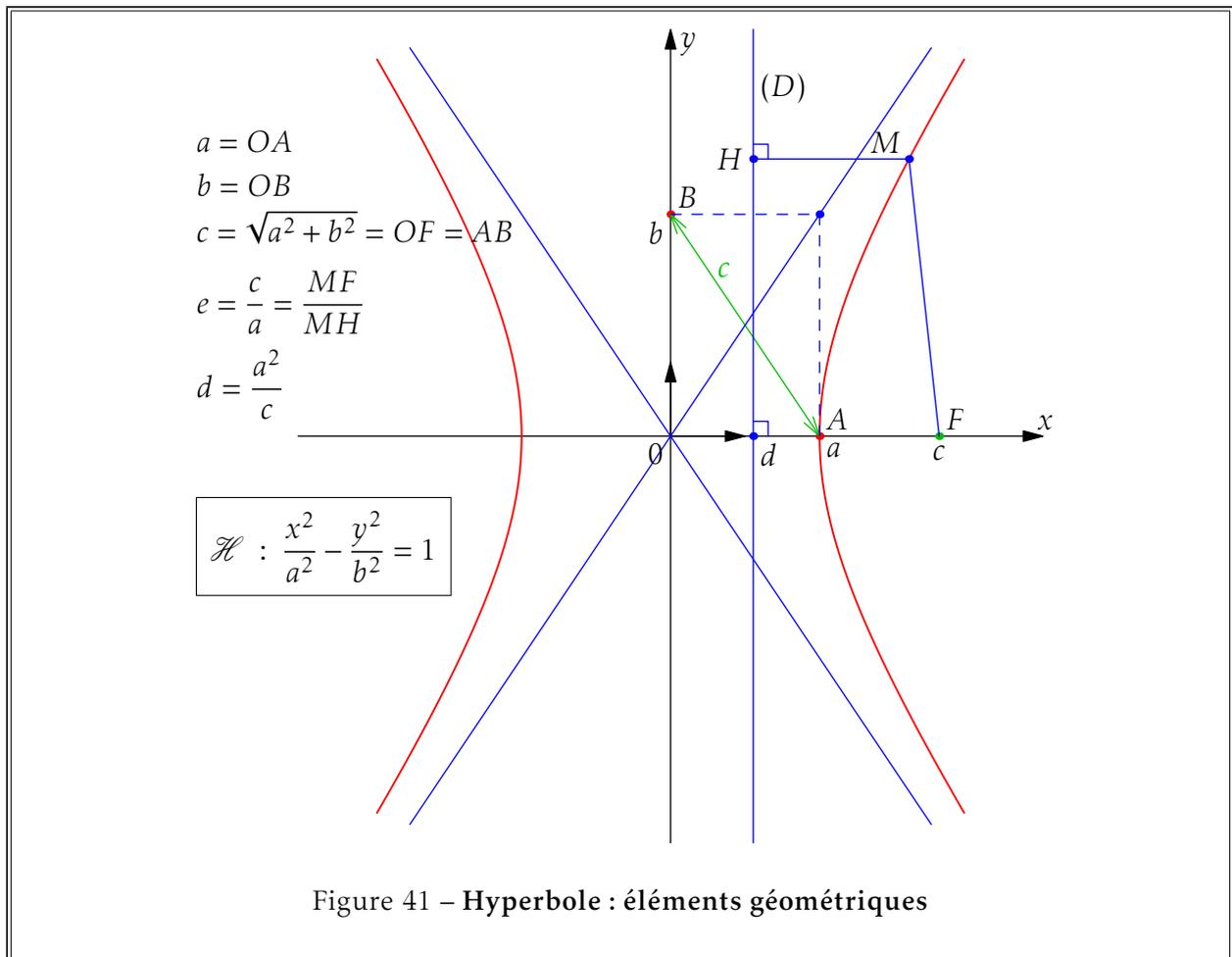
- Les foyers sont alors sur  $Ox$ .
- $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ , est la distance du centre aux foyers.

- $e = \frac{c}{a} = \frac{MF}{MH} > 1$ , est l'excentricité.
- Les asymptotes sont d'équation :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$ .  
On les trouve en annulant le second membre dans l'équation réduite.
- La directrice (D) est à la distance  $\frac{a^2}{c}$  du centre, perpendiculaire à l'axe focal.
- Le paramètre  $p$  de l'hyperbole, qui intervient en coordonnées polaires est :  $p = \frac{b^2}{a} = ed$ , où  $d$  est la distance du foyer à la directrice correspondante.

b/ Équation par foyer F et directrice D

C'est :  $\frac{MF}{MH} = e$ , avec  $e > 1$ .

Les éléments de l'hyperbole sont précisés figure 41, ci-dessous.



c/ Détermination bifocale

**Théorème :** L'ensemble des points M du plan vérifiant :  $|MF - MF'| = k$ , avec F et F' deux points et k une constante est une hyperbole de foyers F et F'.

d/ Équation en coordonnées polaires

C'est :  $\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$  un des foyers F étant à l'origine

- $p$  est le paramètre de l'hyperbole,  $e$  est l'excentricité
- l'axe focal est Ox

#### 41.4. Identification d'une conique

On part d'un polynôme non nul du second degré en  $x$  et  $y$

- cas où il n'y a pas de termes en  $xy$ 
  - avaler, si possible, les termes en  $x$  et en  $y$  dans des carrés :  $x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$   
Cela revient à faire une translation de l'origine du repère.
  - se ramener ensuite à une des formes canoniques décrites.
    - On trouve des paraboles, hyperboles et ellipses (ou cercles)
    - mais aussi des coniques dégénérées : couple de droites, droite, point, vide.
- cas où il y a des termes en  $xy$ 
  - on repère la forme quadratique formée des seuls termes du second degré :  $ax^2 + 2bxy + cy^2$   
on considère sa matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  qu'on diagonalise dans une base orthonormale directe de vecteurs propres, avec  $P$  la matrice de passage et  $\lambda$  et  $\mu$  les deux valeurs propres.  
Cela revient à faire une rotation du repère.
  - alors  $ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda X^2 + \mu Y^2$  avec  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  qui nous sert aussi à transformer le reste de l'équation de la conique.
  - il n'y a donc plus de termes en  $xy$  dans ce repère. On est ramené au cas précédent.

#### 41.5. Projection d'une conique sur un plan

La projection d'une conique sur un plan est, en général une conique de même type.

- Une parabole se projette selon une parabole, ou une droite ou une demi-droite ;
  - Une ellipse se projette selon une ellipse ou un segment de droite ;
  - Une hyperbole se projette selon une hyperbole ou une droite ou de 2 demi-droites de la même droite.
- Réciproquement, si la projection d'une **courbe plane** est une conique **propre**, alors cette courbe est une conique propre de même type.

## 42. Quadriques

Une quadrique, éventuellement dégénérée, est une surface ayant pour équation cartésienne  $P(x, y, z) = 0$  avec  $P(x, y, z)$  un polynôme du second degré.

### 42.1. Équations réduites des quadriques propres

- Ellipsoïde (E)** :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  avec  $a > 0$   $b > 0$   $c > 0$   
Si  $a = b$ , il est de révolution d'axe  $Oz$   
Il ne contient pas de droites.
- Paraboloïde elliptique (PE)** :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$  avec  $a > 0$   $b > 0$   
Si  $a = b$ , il est de révolution d'axe  $Oz$   
Il ne contient pas de droites.  
Sur la figure 42, page suivante, on a représenté l'ellipsoïde.
- Paraboloïde hyperbolique (PH)** :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$  avec  $a > 0$   $b > 0$

Il n'est jamais de révolution, mais contient deux familles de droites obtenues en factorisant :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ ,

$$\text{Ce qui donne : } \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \\ \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right) = 2pz \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \\ \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right) = 2pz \end{cases}$$

Par tout point, il passe deux droites distinctes tracées sur la surface, incluses également dans le plan tangent à ce point.

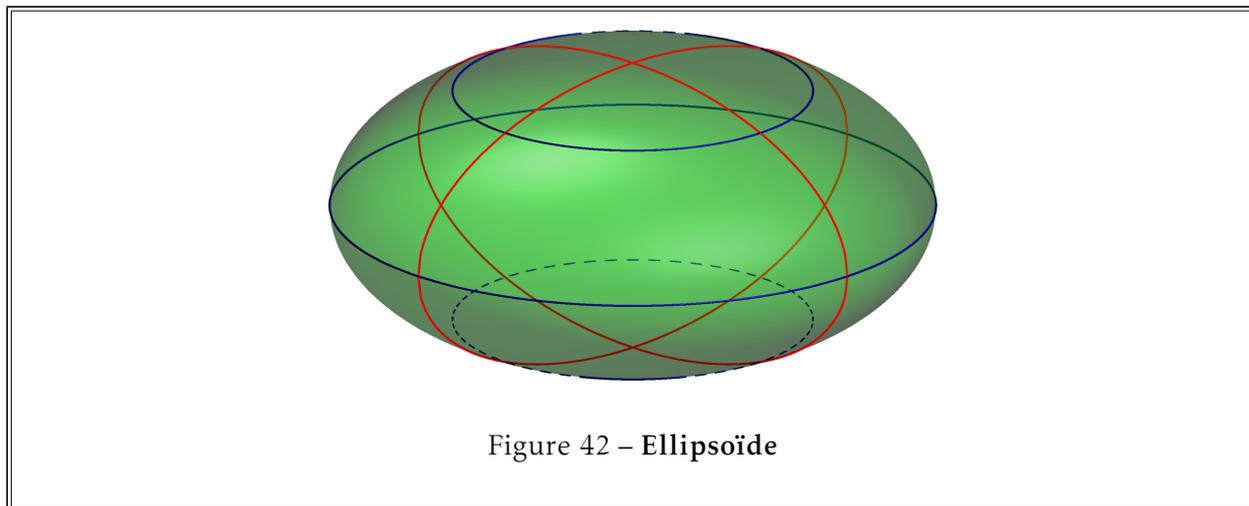


Figure 42 – Ellipsoïde

Sur la figure 43, ci-dessous, on a représenté les paraboloides elliptiques et hyperboliques.

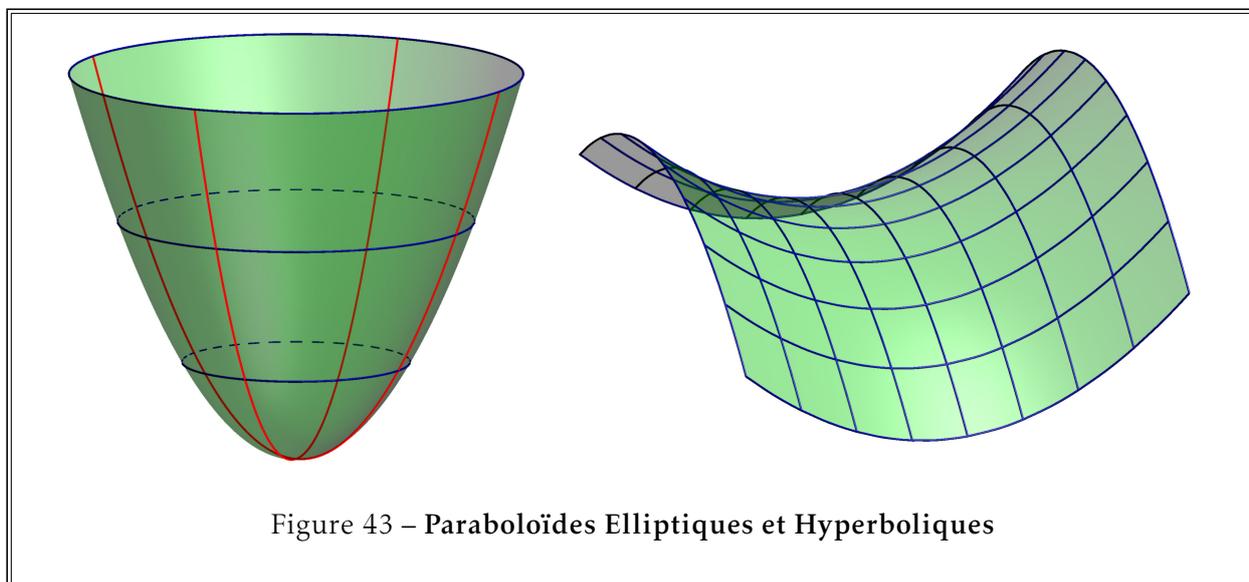


Figure 43 – Paraboloides Elliptiques et Hyperboliques

- **Hyperboloïde à 1 nappe (H1)** :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  avec  $a > 0$   $b > 0$   $c > 0$

Si  $a = b$ , il est de révolution d'axe Oz

Le cône asymptote est d'équation :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

Il contient deux familles de droites obtenues en factorisant :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$ , et  $1 - \frac{y^2}{b^2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) \left( \frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} \right) = \left( 1 + \frac{y_0}{b} \right) \left( 1 - \frac{y}{b} \right) \\ \left( \frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) \left( \frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} \right) = \left( 1 - \frac{y_0}{b} \right) \left( 1 + \frac{y}{b} \right) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) \left( \frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} \right) = \left( 1 - \frac{y_0}{b} \right) \left( 1 + \frac{y}{b} \right) \\ \left( \frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) \left( \frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} \right) = \left( 1 + \frac{y_0}{b} \right) \left( 1 - \frac{y}{b} \right) \end{array} \right.$$

Par tout point, il passe deux droites distinctes tracées sur la surface, incluses également dans le plan tangent à ce point.

- **Hyperboloïde à 2 nappes (H2)** :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$  avec  $a > 0$   $b > 0$   $c > 0$

Si  $a = b$ , il est de révolution d'axe Oz

Le cône asymptote est d'équation :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

H2 ne contient pas de droites.

Sur la figure 44, page ci-contre, on a représenté les hyperboloïdes à 1 et 2 nappes.

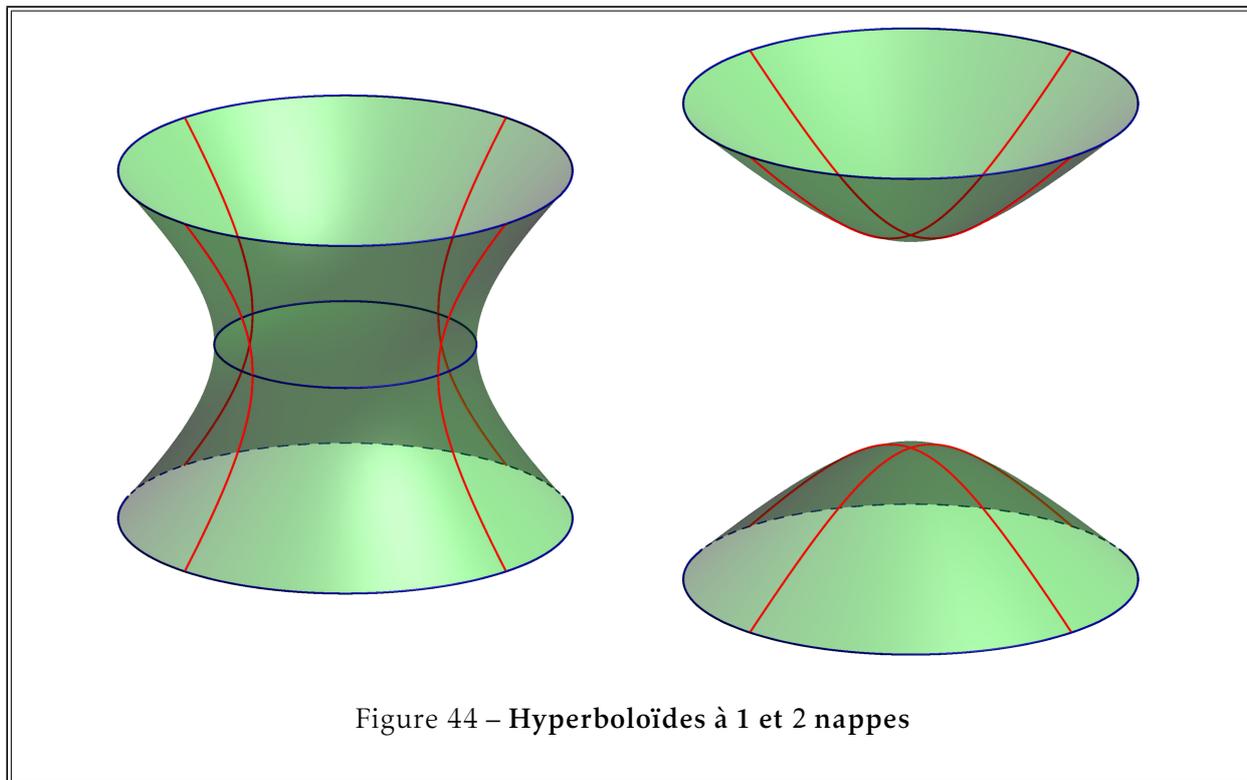


Figure 44 – Hyperboloïdes à 1 et 2 nappes

## 42.2. Quadriques dégénérées

### a/ Cylindres

On peut trouver des cylindres du second degré, facilement reconnaissables en équations réduites par l'absence d'une coordonnée dans l'équation.

Ce qui donne :

- Des cylindres elliptiques :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ;
- des cylindres paraboliques :  $y^2 = 2px$  ;
- des cylindres hyperboliques :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

### b/ Cônes

On peut également trouver des cônes du second degré, reconnaissables par une équation réduite homogène en degré.

Ce qui donne :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$

### c/ Autres cas

Les autres cas sont formés de plans, de droites ou d'assemblages de tels éléments géométriques.

## 42.3. Identification géométrique

Les intersections avec un plan quelconque, avec un plan tangent, ou la connaissance d'éléments de symétrie permettent une identification « facile ».

### Intersection avec un plan tangent

	E	PE	PH	H1	H2	Cyl. E	Cyl. P	Cyl. H
Deux droites : tout point est en col			×	×				
Un point : tout point est en ballon	×	×			×			
Une droite : tout point en ballon						×	×	×

### Intersection avec un plan non tangent

	E	PE	PH	H1	H2	Cyl. E	Cyl. P	Cyl. H
Ellipse	×	×		×	×	×		
Parabole		×	×	×	×		×	
Hyperbole			×	×	×			×
Vide	×	×			×	×	×	×
Deux droites parallèles						×	×	×

### Éléments de symétrie et axe de révolution

	E	PE	PH	H1	H2	Cyl. E	Cyl. P	Cyl. H
Centre de symétrie	1			1	1	∞		∞
Axe de symétrie	3 ou ∞	1	1 ou 3	3 ou ∞	3 ou ∞	∞	∞	∞
Plan de symétrie	3 ou ∞	1 ou ∞	2	3 ou ∞	3 ou ∞	∞	∞	∞
Peut être de révolution	×	×		×	×	×		

#### 42.4. Identification d'une quadrique

On part d'un polynôme du second degré en  $x, y$  et  $z$ .

- cas où il n'y a de termes ni en  $xy$ , ni en  $xz$ , ni en  $yz$ ,

- avaler si possible les termes en  $x, y$  et en  $z$  dans des carrés :  $x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$

Cela revient à faire une translation de l'origine du repère.

- se ramener ensuite à une des formes canoniques décrites.
  - On trouve des paraboloides elliptiques et hyperboliques, hyperboloïdes à 1 ou 2 nappes et ellipsoïdes (ou sphères)
  - mais aussi des quadriques dégénérées : cylindres, cônes, ..., point, vide
- cas où il y a des termes en  $xy, xz$  ou  $yz$ ,

- la forme quadratique est formée des termes du second degré :  $ax^2 + 2bxy + 2cxz + dy^2 + 2eyz + fz^2$ ,

on considère sa matrice :  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ , qu'on diagonalise dans une base orthonormale de vec-

teurs propres, avec  $P$  la matrice de passage orthogonale et  $\lambda, \mu$  et  $\nu$ , les trois valeurs propres.

Si on a pris une base orthonormale directe, cela revient à faire une rotation du repère.

- alors :  $ax^2 + 2bxy + 2cxz + dy^2 + 2eyz + fz^2 = \lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2$ ,

avec  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ , qui nous sert aussi à transformer la forme linéaire.

On peut remarquer que si la forme linéaire est nulle, la recherche effective de la matrice de passage  $P$ , orthogonale, est inutile.

- il n'y a donc plus de termes en  $xy, xz$  ou  $yz$  dans ce repère. On est ramené au cas précédent.

## 42.5. Classification selon les valeurs propres

Si on a une valeur propre double non nulle, la quadrique est de révolution.

- 3 valeurs propres strictement de même signe, on a :
  - un ellipsoïde,
  - un point,
  - le vide.
- 2 valeurs propres strictement de même signe et une nulle, on a :
  - un parabololoïde elliptique,
  - un cylindre elliptique,
  - une droite ou le vide.
- 2 valeurs propres strictement de signes différents et une nulle, on a :
  - un parabololoïde hyperbolique,
  - un cylindre hyperbolique,
  - 2 plans sécants.
- 2 valeurs propres strictement d'un signe, la troisième strictement de l'autre, on a :
  - un hyperboloïde à une ou deux nappes,
  - un cône.
- une valeur propre non nulle et 0 valeur propre double, on a :
  - un cylindre parabolique,
  - 2 plans parallèles, un plan ou le vide.

Si une des variables est absente, c'est un cylindre.

## 43. Surfaces de révolution, cylindres et cônes

### 43.1. Surfaces de révolution

**Définition :** Une **surface de révolution d'axe  $\Delta$**  est formée d'une famille de cercles d'axe  $\Delta$ . Un plan contenant l'axe de révolution est un **plan méridien**, son intersection avec la surface est une **méridienne**.

La méridienne est symétrique par rapport à l'axe de révolution. On parle parfois de demi-méridienne.

**Théorème :** Une surface de révolution a une équation de la forme :  $F(S, P) = 0$ , avec :  $S(x, y, z) = R^2$ , l'équation d'une sphère et  $P(x, y, z) = k$ , l'équation d'un plan. L'axe de révolution est orthogonal à  $P$  passant par le centre de  $S$ .

**Corollaire :**

Dans le cas où l'axe est  $Oz$  la surface de révolution a une équation de la forme :  $F(x^2 + y^2, z) = 0$

a/ Surface de révolution  $\Sigma$  engendrée par la rotation de  $\Gamma$  autour de  $\Delta$

- faire une figure symbolique (figure 45, page suivante)

- partir d'un point **quelconque** de la surface  $\Sigma$  cherchée :  $M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$

- écrire qu'un point de  $\Gamma$  appartient à la fois
  - à la sphère centrée sur un point arbitraire de  $\Delta$  (choisi le plus simple possible) passant par  $M$
  - au plan perpendiculaire à  $\Delta$  passant par  $M$
- éliminer les paramètres, on obtient l'équation d'une surface  $\Sigma'$  de révolution qui contient  $\Sigma$  la surface cherchée.

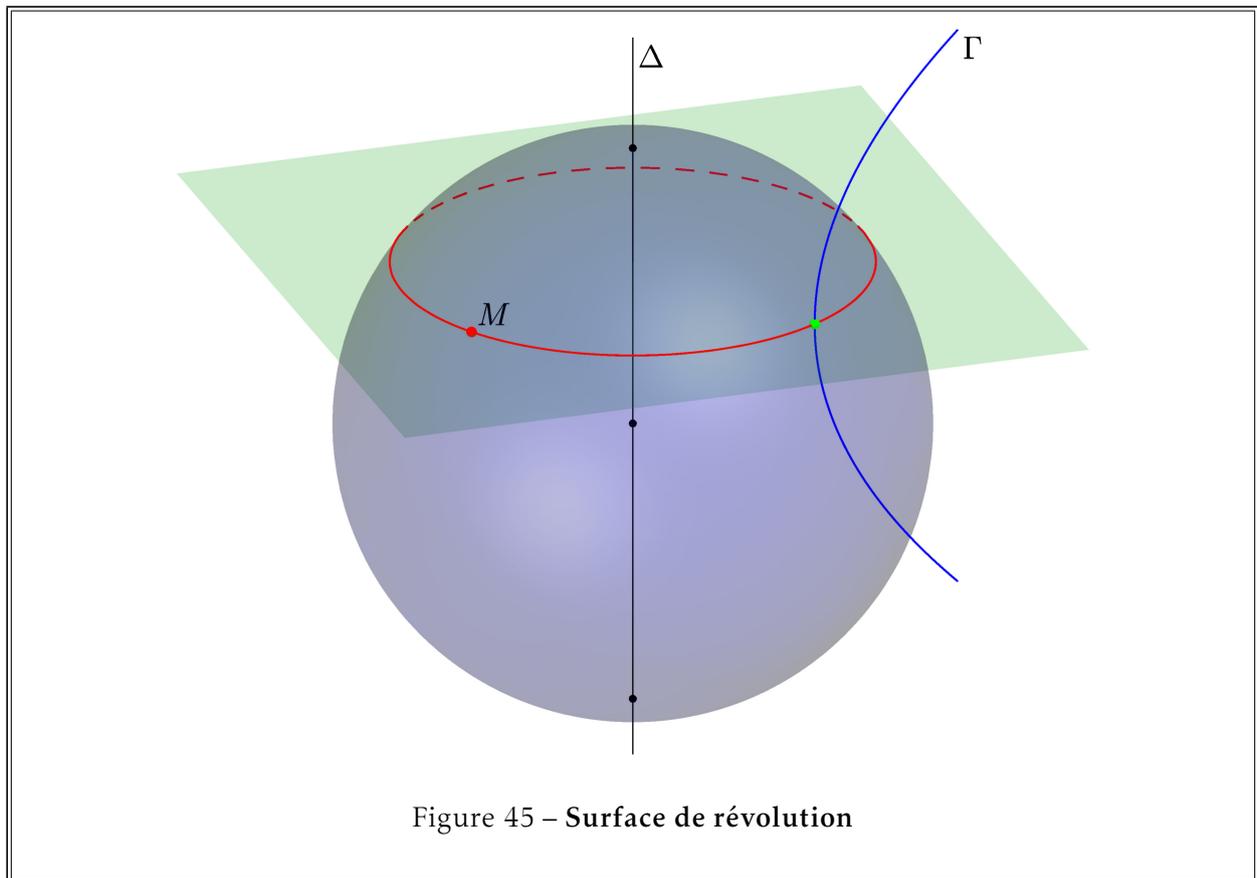


Figure 45 – Surface de révolution

Si  $\Gamma$  est donnée en paramétrique, un point de  $\Gamma$  correspond à une valeur du paramètre,

tandis que si  $\Gamma$  est donnée par intersection de surfaces, un point de  $\Gamma$  est repéré par :

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

b/ Surface de révolution  $\Sigma$  d'axe  $Oz$  et de demi-méridienne  $f(x, z) = 0$

- On reconstitue la méridienne complète  $f(x, z) \times f(-x, z) = F(x^2, z) = 0$
- La surface est d'équation  $F(x^2 + y^2, z) = 0$

### 43.2. Cylindres

**Définition :** Un **cylindre de direction**  $\vec{u}$  est formée d'une famille de droites de direction  $\vec{u}$ . Ces droites sont les **généralices**. Une courbe qui rencontre toutes les généralices est une **directrice**. L'intersection de la surface avec un plan orthogonal à la direction  $\vec{u}$ , est une **section droite** du cylindre.

Un cylindre n'est, en général, pas un cylindre de révolution !

On peut voir sur figure 46, page ci-contre, deux exemples de cylindres, au sens mathématique du terme !

**Théorème :** Un cylindre de direction  $\vec{u}$  a une équation de la forme :  $F(P_1, P_2) = 0$ ,  
avec :  $P_1(x, y, z) = k_1$ , et  $P_2(x, y, z) = k_2$ , l'équation de deux plans.  
De plus,  $P_1 \cap P_2$  donne la direction  $\vec{u}$  du cylindre.

**Corollaire :** Dans le cas où la direction est  $\vec{k}$  le cylindre a une équation de la forme :  $F(x, y) = 0$ .

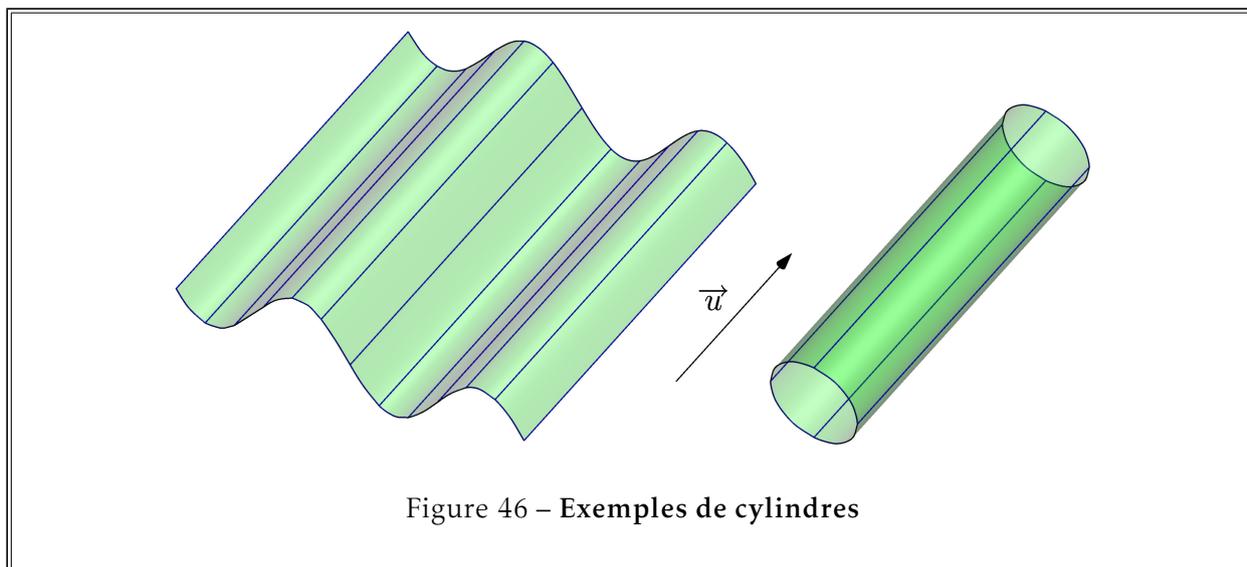


Figure 46 – Exemples de cylindres

a/ Cylindre de direction et de directrice donnés

On cherche le cylindre  $\Sigma$  de direction  $\vec{u}$  et de directrice  $\Gamma$

- faire une figure symbolique (figure 47, ci-dessous)

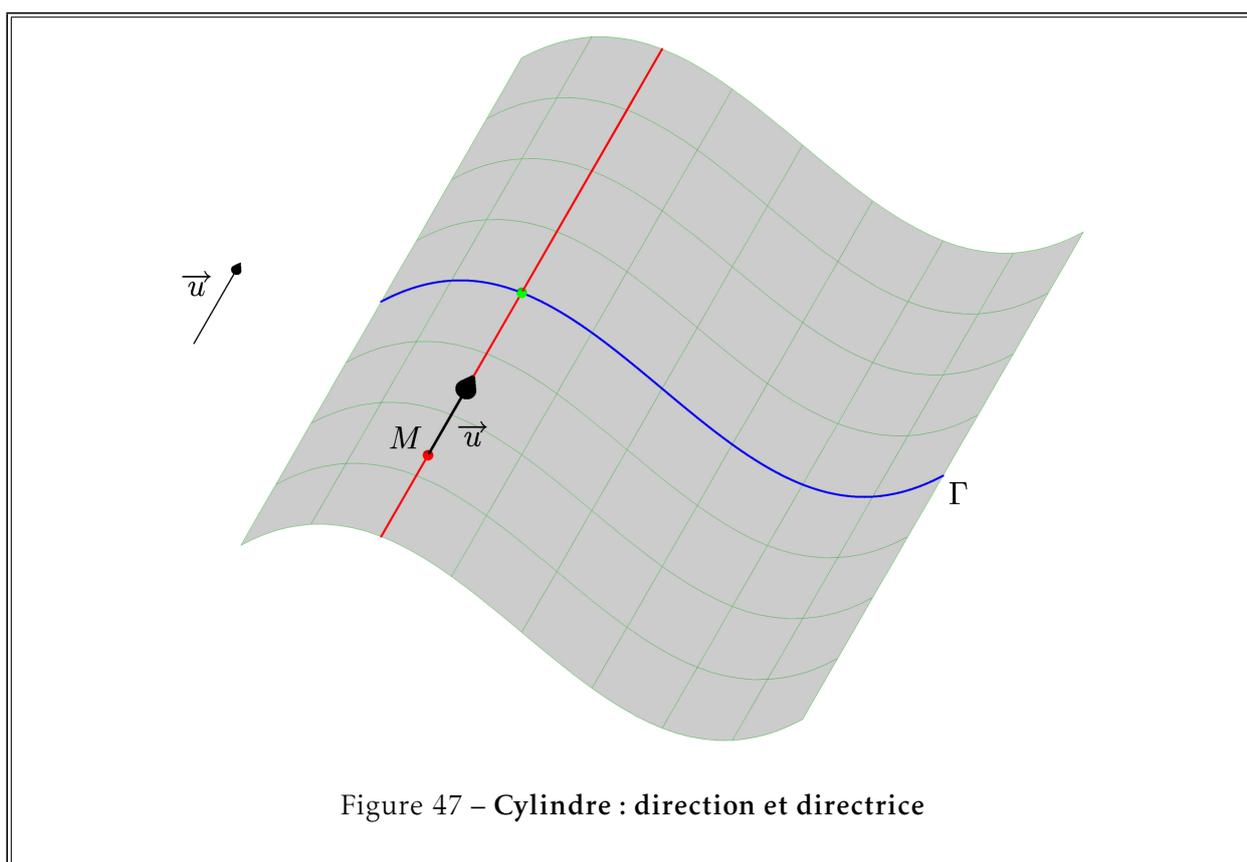


Figure 47 – Cylindre : direction et directrice

- partir d'un point **quelconque** de la surface  $\Sigma$  cherchée :  $M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$
- écrire que la droite (décrite en paramétrique)  $(M, \vec{u})$  rencontre  $\Gamma$
- éliminer les paramètres, on obtient l'équation d'un cylindre  $\Sigma'$  qui contient  $\Sigma$  le cylindre cherché.

b/ Contour apparent

Pour le contour apparent de  $\mathcal{S}$ , on écrit que le gradient de  $\mathcal{F}$  en un point est normal à la direction du cylindre.

On note :  $\vec{u} : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

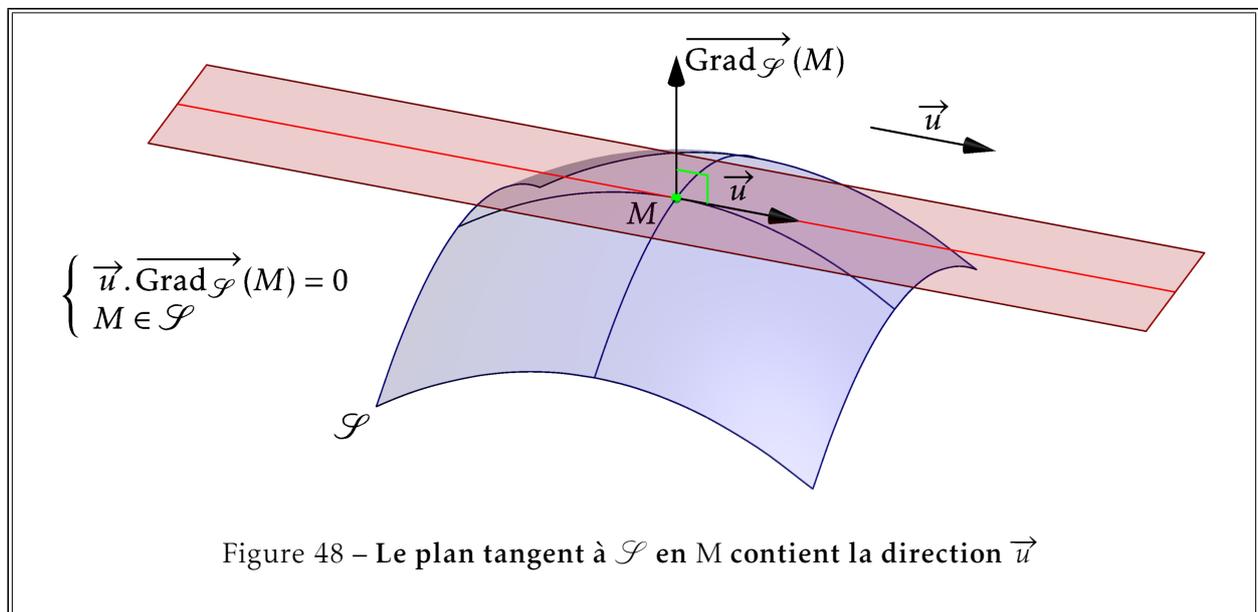
On obtient le contour apparent par intersection de surfaces :

$$F(x, y, z) = 0$$

$$\alpha \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) + \beta \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) + \gamma \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 0$$

On n'hésitera pas à simplifier au maximum ces équations dès que possible.

La figure 48, ci-dessous, illustre cette recherche.



Si le cylindre est circonscrit à une surface, on cherche le contour apparent, puis on cherche le cylindre de la direction donnée et de directrice ce contour apparent.

### 43.3. Cônes

**Définition :** Une **cône de sommet**  $\Omega$  est formée d'une famille de droites passant par  $\Omega$ . Ces droites sont les **généatrices**. Une courbe qui rencontre toutes les génératrices est une **directrice**.

Un cône n'est, en général, pas un cône de révolution !

On peut voir sur figure 49, page suivante, deux exemples de cônes, au sens mathématique du terme !

**Théorème :** Une surface d'équation cartésienne un polynôme en  $x, y, z$  est un cône de sommet  $O$  si et seulement si tous les monômes sont de même degré (degré cumulé en  $x, y, z$ ).

a/ Cône  $\Sigma$  de sommet  $\Omega$  et de directrice  $\Gamma$

- faire une figure symbolique (figure 50, page ci-contre)

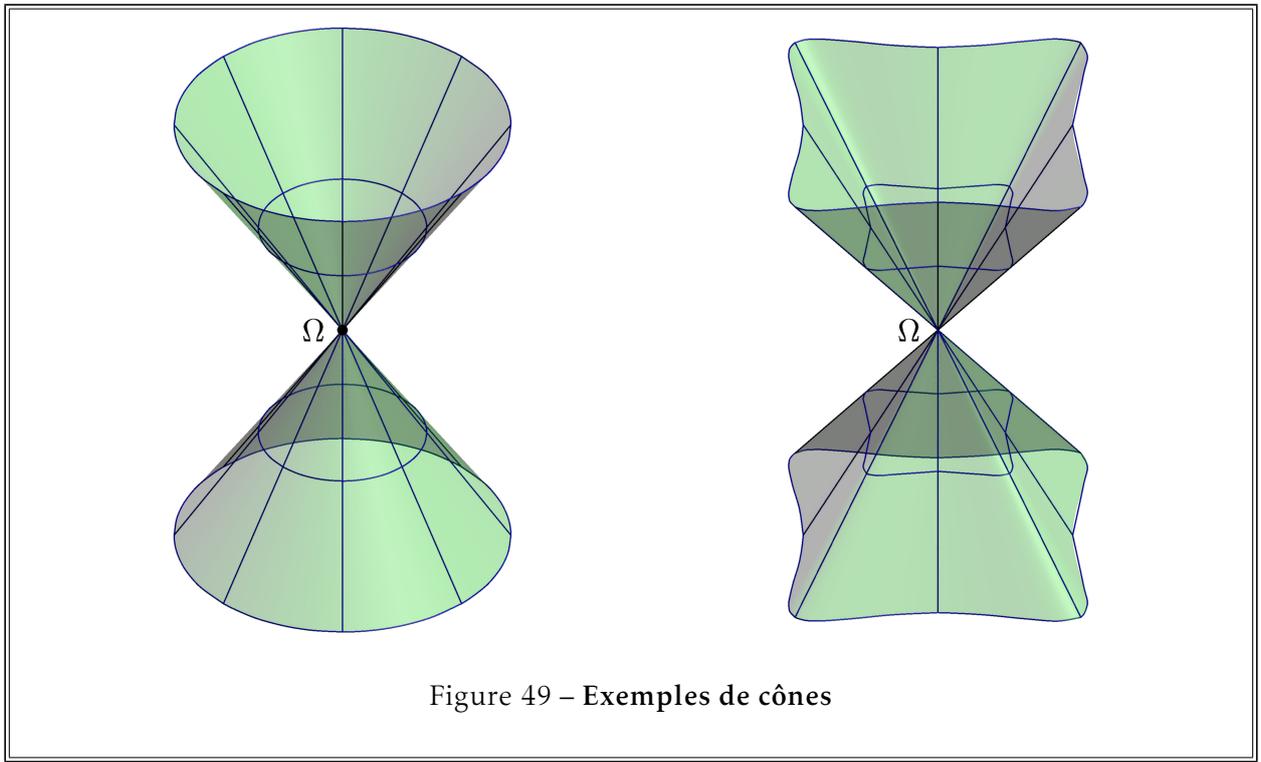


Figure 49 – Exemples de cônes

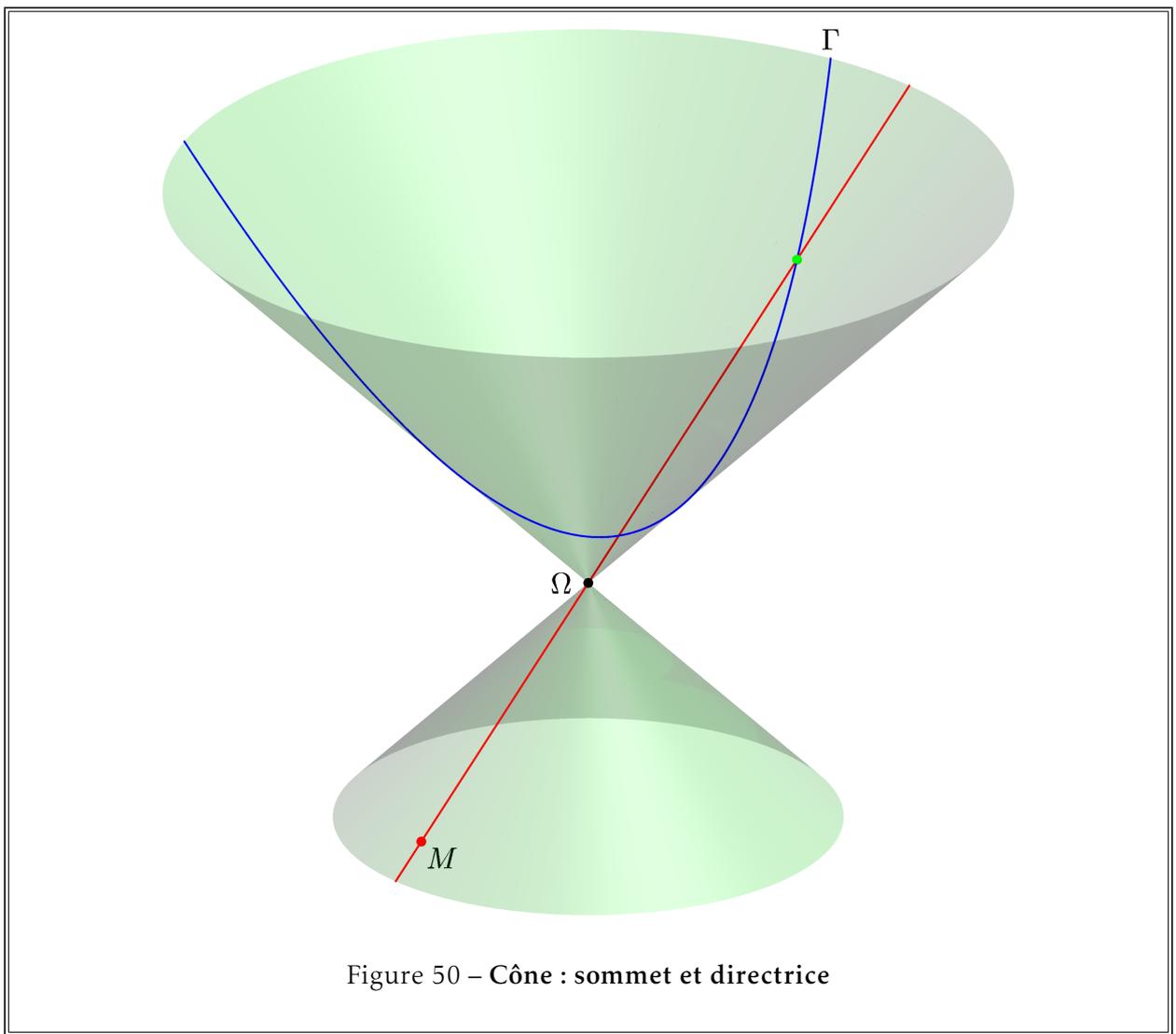


Figure 50 – Cône : sommet et directrice

- partir d'un point **quelconque** de la surface  $\Sigma$  cherchée  $M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$
- écrire que la droite (décrite en paramétrique)  $(\Omega M)$  rencontre  $\Gamma$
- éliminer les paramètres, on obtient l'équation d'un cône  $\Sigma'$  qui contient  $\Sigma$  le cône cherché.

#### b/ Contour apparent

Pour le contour apparent de  $\mathcal{S}$  vu du point  $\Omega$ , on écrit que le gradient de  $\mathcal{S}$  en un de ses points  $P$  est normal au vecteur  $\overrightarrow{\Omega P}$ .

On note :  $\Omega : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

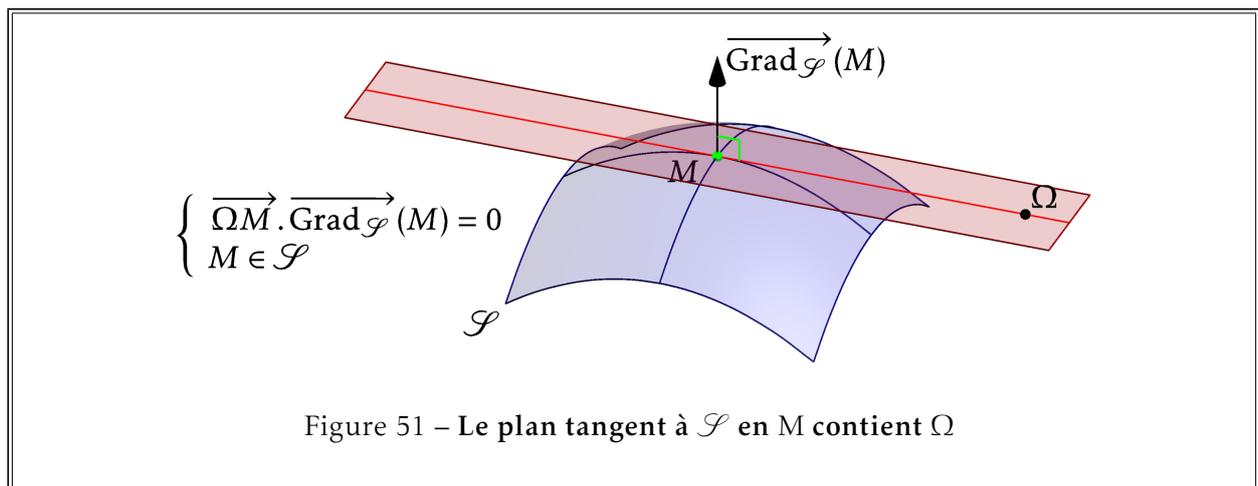
On obtient le contour apparent par intersection de surfaces :

$$F(x, y, z) = 0$$

$$(x - a) \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) + (y - b) \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) + (z - c) \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 0$$

On n'hésitera pas à simplifier au maximum ces équations dès que possible.

La figure 51, ci-dessous, illustre cette recherche.



Pour le cône circonscrit, on cherche d'abord le contour apparent puis le cône de sommet donné et de directrice ce contour apparent.

#### 43.4. Cylindres et cônes de révolution

On ne cherche pas l'équation d'un cylindre ou d'un cône de révolution comme celle d'un cylindre ou d'un cône ni comme celle d'une surface de révolution !...

##### a/ Cylindre de révolution

Pour un cylindre de révolution défini par son axe  $D : (A, \vec{u})$  et son rayon  $R$

On cherche l'ensemble des points  $M$  tels que la distance de  $M$  à  $D$  vaut  $R$ . (Voir Page 84)

On élève tout au carré pour enlever les valeurs absolues.

b/ Cône de révolution

Pour un cône de révolution défini par son axe D dirigé par  $\vec{u}$ , son sommet  $\Omega$  et son demi angle au sommet  $\theta$

On cherche l'ensemble des points M tels que l'angle  $(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M})$  a pour mesure  $\theta$ . (Voir Page 83)

On élève tout au carré pour enlever les valeurs absolues.

# Maple

On présentera cet aide-mémoire sous forme de tableaux à trois colonnes : les mots-clés, une description rapide de leur fonction et, enfin, un exemple d'utilisation.

Rappelons qu'une erreur en Maple est le plus souvent à chercher **avant** l'endroit où Maple la détecte.

## 44. Bases

### 44.1. Manipulations de base

On ne confondra pas une **expression** et une **fonction**.

Par exemple :  $\sin(t)$  est une expression de  $t$ , tandis que la fonction est :  $\sin$ .

; ou :	Exécution d'une commande avec ou sans affichage du résultat.	> 12*13;
+ - * /	Somme, différence, produit ou quotient d'expressions.	> (x+2)/t;
** ou ^	Exponentielle.	> 12**13;
&*	Produit de matrices ou vecteurs. Sans le &, Maple considère tous les produits comme commutatifs... De plus l'usage de <code>evalm</code> est indispensable pour avoir un affichage effectif des lignes et colonnes.	> evalm(P^(-1)&*A&*P);
iquo irem	Quotient et reste de la division des entiers.	> iquo(1732,13);
quo rem	Quotient et reste de la division euclidienne des polynômes (il faut préciser la variable).	> r :=rem(x^5,x^2+1,x);
!	Factorielle.	> 123!;
binomial	Coefficients binomiaux comme $C_n^2$	> binomial(2,n);
= < > <> <= >=	Opérateurs de comparaison, souvent utilisés dans un <b>si ...alors ...sinon</b> , ou dans une résolution d'équation ou inéquation.	> solve(x^2>1,x);
and or not	Opérateurs logiques, souvent utilisés dans un <b>si ...alors ...sinon</b> .	> evalb(a=1 or b=0);
@	Composée de fonctions (qui ne sont pas des expressions ...).	> f2 :=f@f;
:=	Affectation, permet de donner une valeur à une variable.	> a :=(x+1)/(x-1);
'variable'	Permet de libérer, désaffecter une variable.	> a :='a';
->	Définition rapide d'une fonction (qui n'est toujours pas une expression).	> f :=->x^2-1 ;f(2);
''	Variable valant le dernier résultat calculé.	> p :=(x+1)/x; > ''**2;

## 44.2. Constantes

Pi I infinity	Nombres $\pi$ , $i$ , et $+\infty$ , on fera attention aux majuscules !	> Pi, pi; > evalf(Pi), evalf(pi);
---------------	---	--------------------------------------

## 44.3. Sommes et produits

sum product	Calcul de toute somme ou produit indicés. On conseille d'utiliser des apostrophes.	> sum('1/(n^2)', n'=1..7); > sum('p', n'=0..infinity);
-------------	--	---

## 44.4. Fonctions d'évaluation

Les fonctions d'évaluation sont nombreuses et importantes, elles forcent Maple à effectuer une évaluation de la quantité afin de ne pas rester en calcul formel...

Ceci est très important car l'exécution d'une procédure ou d'un calcul n'est **pas du tout** la même selon que l'on travaille en calcul approché « flottant » ou en calcul formel « exact ». Quand on veut au final du calcul approché, il faut se mettre en calcul approché le plus tôt possible...

eval	Évaluation générale d'une expression. Cette instruction est surtout utilisée dans le corps des procédures pour forcer l'évaluation complète d'une expression.	> eval(Pi*3.14);
evalb	Évaluation d'une expression logique (booléenne), c'est une quantité vraie ou fausse, souvent utilisée dans un si...alors...sinon.	> evalb(x>=1);
evalf	Valeur approchée d'une expression, le nombre de chiffres significatifs est dans la variable Digits. Indispensable quand on ne veut pas que Maple reste inutilement en théorique.	> Digits :=50; > evalf(Pi/2);
evalc	Évaluation d'un complexe en partie réelle et partie imaginaire. Attention Maple considère a priori les variables libres comme complexes...	> evalc((2*I)^3);
evalm	Force l'évaluation d'un vecteur ou d'une matrice en ligne et colonnes, ce que Maple ne fait pas de lui même.	> evalm(A&*B);

## 44.5. Transformation générale d'expressions

subs	Substitue dans l'expression « p » , l'expression « y » à la variable « x » .	> subs(x=y,p);
collect	Regroupe les termes d'une même puissance d'une expression par rapport à une variable.	> collect(p,x);
sort	Trie selon les puissances décroissantes une expression selon une variable.	> sort(p,x);
expand	Développe une expression polynomiale, trigonométrique, exponentielle ou logarithmique.	> expand((x-a)**7); > expand(sin(2*x)); > expand(ln((x+1)/(x-1))); > expand(exp(x+2*y));
combine options : trig exp ln power	Presque la fonction réciproque de expand. Regroupe les termes selon l'option choisie (linéarise avec trig...).	> combine(sin(x)^7, trig);

factor	Factorise une expression. Il faut souvent ajouter les éléments utilisés dans la factorisation, qu'on peut chercher avec solve.	> factor(x**2-2); > factor(x**2-2,sqrt(2)); > factor(x**2+2,sqrt(2)); > factor(x**2+2,{sqrt(2),I});
convert options : parfrac tan	Convert possède de nombreuses options pour transformer une expression, en particulier trigonométrique. Avec l'option parfrac, il décompose en « éléments simples » une fraction rationnelle. Il vaut mieux auparavant factoriser complètement le dénominateur.	> convert(p,tan); > convert(p,parfrac,x);

#### 44.6. Simplification d'expressions

normal	Simplifie (un peu) les fractions rationnelles. Comme pour « convert », on a intérêt à factoriser le dénominateur avant la demande de simplification.	> p :=(x^2-1)/(x^2+2*x+1); > normal(p);
simplify	Essaye de simplifier une expression, possède de nombreuses options...mais peut également s'utiliser sans option.	> simplify(p);

#### 44.7. Structures de données

a..b	Intervalle de a à b. Utilisé dans les tracés de courbes et les intégrales par exemple.	> int(sin(t),t=0..Pi); > plot(sin(t),t=0..Pi);
{a,b,c} union intersect	Ensemble formé de a, b et c, et opérateurs d'union et d'intersection d'ensembles. Utilisé par exemple pour tracer plusieurs courbes sur un même graphe.	> E :=E union {a,b } > plot({sin(t),cos(t)},t=0..Pi);
[a,b,c]	Liste formée de a, b et c. Utilisé par exemple pour tracer des courbes en paramétriques.	> plot([sin(t),cos(t),t=0..Pi], x=-2..2,y=-2..2);

### 45. Mathématiques usuelles

#### 45.1. Fonctions mathématiques usuelles

Signalons que Maple possède de très nombreuses fonctions « usuelles » qui apparaissent lors d'une résolution d'équation, d'un calcul de primitive...

exp ln	Exponentielle et logarithmes. Maple les définit sur $\mathbb{C}$ , comme la plupart des fonctions.	> exp(1); > ln(1+I);
sin cos tan	Sinus, cosinus et tangente.	> sin(Pi/2);
sinh cosh tanh	Sinus, cosinus et tangente hyperboliques.	> sinh(1);
arcsin arccos arctan	Arcsinus, arccosinus et arctangente.	> arctan(1);
abs	Valeur absolue ou module, selon qu'on est sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ .	> abs(3+4*I); > abs(-Pi);
Re Im	Partie réelle et imaginaire d'un complexe. Attention, pour Maple, a priori, une variable libre est complexe.	> Re(a+b*I);
conjugate	Conjugué d'un complexe.	> conjugate(1+I);
argument	Argument d'un nombre complexe.	> argument(1+I);

## 45.2. Limites et développements limités

limit	Calcul de limites d'une expression.	> limit(p,x=1); > limit(p,x=-infinity);
series	Calcul du développement limité ou asymptotique d'une expression ; il faut préciser le point et l'ordre désiré. . .	> p :=series(p,x=1,5);
leadterm	Calcul du premier terme a priori non nul d'un développement limité. Quand il n'est pas nul, c'est un équivalent.	> series(leadterm(p),x=0,8);

## 45.3. Dérivées

diff	Dérivée d'une expression par rapport à la ou les variables spécifiées.	> diff(sin(x),x); > diff(sin(x),x,x);
D	Dérivée d'une fonction.	> D(sin);

## 45.4. Primitives et intégrales

int	Calcul d'une primitive, sans constante, ou d'une intégrale, simple ou généralisée, d'une expression.	> int(p,x); > int(p,x=0..infinity);
Int	Forme « inerte » de la précédente. Pas de calcul.	> Int(p,x);
changevar et intparts du package student	Effectue un changement de variable ou une intégration par parties (indiquer la partie qu'on dérive) sur une intégrale inerte. Maple ne cherche donc pas à effectuer le calcul.	> changevar(t^2=u,Int(t/(t^2+1)),t); > intparts(Int(x^3*sin(x),x),x^3);

## 45.5. Résolution d'équations ou de systèmes d'équations

solve	Résolution de tous types d'équations et inéquations par rapport à une variable spécifiée. Mais, Maple ne donne pas nécessairement toutes les solutions. . .	> solve(a*x^2+2*a*x+1,x); > solve(a*x^2+2*a*x+1,a); > solve((sin(t)=cos(2*t)),t);
fsolve	Résolution approchée de tous types d'équations, avec les mêmes réserves que ci-dessus.	> fsolve(a*x^2+2*a*x+1,a); > fsolve((sin(t)=cos(2*t)),t);
dsolve option numeric	Résolution de tous types d'équations différentielles et de systèmes différentiels, avec ou sans conditions initiales. L'option numeric donne une résolution numérique approchée de l'équation ou du système, toujours posé avec des conditions initiales.	> E :=diff(y(x),x)+y(x)=cos(x); > dsolve(E,y(x)); > dsolve({E,y(0)=0},y(x)); > dsolve({E,y(0)=0},y(x), numeric);
rsolve	Résolution de suites récurrentes linéaires.	> rsolve(u(n)=3*u(n-1)-2*u(n-2),u);
linsolve	Résolution de systèmes linéaires présentés matriciellement, les paramètres sont la matrice du système et le vecteur second membre.	> linsolve(A,B);

## 46. Algèbre linéaire

Le package « linalg » doit être chargé auparavant : `> with(linalg);`

### 46.1. Vecteurs

Maple utilise des vecteurs qui sont mathématiquement des vecteurs **colonne**, mais qu'il **écrit en ligne** pour des questions de lisibilité sur l'écran !...

vector	Définition d'un vecteur colonne. U[2] désigne la deuxième coordonnée de U.	<code>&gt; U :=vector([1,4,9]);</code> <code>&gt; U :=vector(3,i-&gt; i*i);</code>
dotprod	Produit scalaire de 2 vecteurs.	<code>&gt; dotprod(U,V);</code>
crossprod	Produit vectoriel de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ .	<code>&gt; crossprod(U,V);</code>
norm( $\dots$ ,2)	Norme Euclidienne d'un vecteur.	<code>&gt; norm(U,2);</code>

### 46.2. Procédé de Schmidt

GramSchmidt <i>option</i> normalized	Applique le procédé de Schmidt à une liste de vecteurs et renvoie une famille orthogonale de vecteurs engendrant le même sous-espace. L'option normalized permet d'avoir des vecteurs normés.	<code>&gt; GramSchmidt([U,V]);</code> <code>&gt; GramSchmidt([U,V], normalized);</code>
--	--	--

### 46.3. Matrices

matrix	Définition d'une matrice (par lignes). A[2,3] est l'élément deuxième ligne, troisième colonne.	<code>&gt; A :=matrix([[1,2],[3,4]]);</code> <code>&gt; B :=matrix(2,2,(i,j)-&gt;2*i+j);</code>
transpose	Transpose une matrice ou un vecteur.	<code>&gt; transpose(A);</code> <code>&gt; evalm(transpose(A));</code>
inverse	Inverse une matrice carrée inversible.	<code>&gt; evalm(inverse(A)&amp;*A);</code>
rank	Rang d'une matrice (pour la valeur générale des paramètres...).	<code>&gt; r :=rank(A);</code>
det trace	Déterminant et trace d'une matrice carrée.	<code>&gt; Δ :=det(A);</code> <code>&gt; trace(A &amp;* B) - trace(B &amp;* A)</code>

### 46.4. Éléments propres

charmat	Matrice caractéristique : $(A - \lambda I_n)$ .	<code>&gt; U :=charmat(A,lambda);</code>
charpoly	Polynôme caractéristique : $\det(A - \lambda I_n)$ .	<code>&gt; P :=charpoly(A,x);</code>
eigenvals	Valeurs propres, chacune avec son ordre de multiplicité. Mais Maple ne trouve pas nécessairement toutes les valeurs propres... Il vaut mieux factoriser d'abord le polynôme caractéristique, en ayant au besoin d'abord cherché les zéros avec un solve.	<code>&gt; eigenvals(A);</code>
eigenvects	Valeurs propres, ordre de multiplicité et base de chaque sous-espace propre.	<code>&gt; eigenvects(A);</code>

## 47. Graphiques

Le package « plots » doit, le plus souvent, être chargé auparavant : `> with(plots);`  
Si on sélectionne le graphique à l'écran, Maple fournit une barre d'outils adaptée.

### 47.1. Courbes du plan

<code>plot</code> <i>option</i> scaling constrained	Tracé de courbes en cartésiennes, {...} permet de tracer plusieurs courbes sur un même graphe.	<code>&gt; plot(x^2,x=-2..2);</code> <code>&gt; plot(x^2,x=-2..2,scaling=constrained);</code> <code>&gt; plot({x^2,2*x+1},x=-2..2);</code>
<code>plot([...],...)</code> <i>option</i> scaling constrained	Tracé de courbes en paramétriques, {...} permet de tracer plusieurs courbes sur un même graphe.	<code>&gt; plot([u/(1+u),1/(1-u),u=-3..3], x=-5..5,y=-5..5);</code>
<code>plot</code> <i>option</i> coords polar	Tracé de courbes en polaires, {...} permet de tracer plusieurs courbes sur un même graphe.	<code>&gt; plot(sin(t)/(1+cos(t)),t=0..Pi, coords=polar,x=-5..5,y=-5..5);</code>
<code>implicitplot</code>	Tracé de lignes de niveau : $f(x, y) = 0$ .	<code>&gt; implicitplot(x*x+y*y=3, x=-2..2,y=-2..2);</code>

### 47.2. Surfaces

<code>plot3d</code>	Tracé de surfaces en coordonnées cartésiennes : $z = f(x, y)$ .	<code>&gt; plot3d(1/(x^2+y^2), x=-2..2,y=-2..2);</code>
<code>plot3d([...],...)</code>	Tracé de nappes paramétrées.	<code>&gt; x :=cos(u)*cosh(v);</code> <code>&gt; y :=sin(u)*cosh(v);</code> <code>&gt; z :=sinh(v);</code> <code>&gt; plot3d([x,y,z],u=0..6.3,v=-2..2);</code>
<code>plot3d</code> <i>option</i> coords cylindrical	Tracé de nappes paramétrées en coordonnées cylindriques, $\rho$ défini en fonction de $\theta$ et $z$ .	<code>&gt; plot3d(sin(z),theta=0..6.3, z=0..2,coords=cylindrical);</code>
<code>plot3d</code> <i>option</i> coords spherical	Tracé de nappes paramétrées en coordonnées sphériques, $\rho$ défini en fonction de $\theta$ et $\varphi$ .	<code>&gt; plot3d(1,theta=0..6.3,phi=0..1.58, coords=spherical);</code>
<code>implicitplot3d</code>	Tracé de surfaces définies par une équation implicite $f(x, y, z) = 0$ .	<code>&gt; implicitplot3d(x*x+y*y-z*z=1, x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2);</code>

### 47.3. Courbes de l'espace

<code>spacecurve</code>	Tracé d'une courbe dans l'espace.	<code>&gt; spacecurve([cos(t),sin(t),t], t=0..15);</code>
-------------------------	-----------------------------------	---

### 47.4. Tracé simultané de plusieurs courbes ou surfaces

- En 2-D ou en 3-D, deux cas se présentent à chaque fois selon qu'on a à faire au même type de graphique ou non.
  - En 2-D, on peut associer des courbes définies en cartésiennes, polaires, paramétriques ou de façon implicite
  - et en 3-D, on peut associer des surfaces ou courbes définies en paramétriques, cylindriques, sphériques ou des surfaces définies de façon implicite.
- Même type de graphiques : il suffit de placer les différentes expressions à tracer entre accolades {...}
- Types de graphiques différents, il faut utiliser les fonctions « display » :

display	Tracé simultané de plusieurs graphiques plans.	> A :=plot(...);B :=plot(...); > display([A,B], scaling=constrained);
display3d	Tracé simultané de plusieurs graphiques de l'espace.	> A :=plot3d(...); > B :=plot3d(...); > display3d([A,B],scaling=constrained);

## 48. Structures de contrôle et procédures

Ces structures de contrôle, répétitives ou alternatives sont le plus souvent utilisées dans le corps des procédures.

On verra dans la suite, page ci-contre, des exemples détaillés de procédures utilisant ces structures.

### 48.1. Structure alternative

if <i>condition</i> then <i>instructions</i> else <i>instructions</i> fi	Structure alternative : si la condition est réalisée, on effectue les commandes après le <b>then</b> , sinon, celles après le <b>else</b> . Le <b>else</b> est d'ailleurs optionnel et le <b>fi</b> termine toujours le <b>if</b> .	> if u=0 then y :=1 else y :=sin(u)/u fi ;
---	---	--

### 48.2. Structure répétitive

for <i>variable</i> from <i>début</i> by <i>pas</i> to <i>fin</i> do <i>instructions</i> od	Les instructions entre <b>do</b> et <b>od</b> sont exécutées pour toutes les valeurs de la variable, depuis le début jusque la fin, en utilisant le pas donné. On étudie ici la suite récurrente $u_{n+1} = u_n + \frac{n}{u_n}$ .	> u :=1 ;n :=10 ; > for i from 1 to n do u :=(u+i/u) od ;
while <i>condition</i> do <i>instructions</i> od	Les instructions entre <b>do</b> et <b>od</b> sont exécutées tant que la condition est vérifiée. Ici, dans une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ , on s'arrête quand deux termes consécutifs sont proches à $10^{-5}$ près.	> u :=1 ; > v :=f(u); > while abs(u-v)> 10^-5 do u :=v ;v :=f(v) od ; > u,v ;
for <i>variable</i> from <i>début</i> by <i>pas</i> to <i>fin</i> while <i>condition</i> do <i>instructions</i> od	Les instructions entre <b>do</b> et <b>od</b> sont exécutées pour toutes les valeurs de la variable, depuis le début jusque la fin, en utilisant le pas donné, tant que la condition est vérifiée. L'exemple est le même que ci-dessus, mais on s'interdit plus de 100 itérations.	> u :=1 ; > v :=f(u); > to 100 while abs(u-v)> 10^-5 do u :=v ;v :=f(v) od ; > u,v ;

Dans tous les cas, on peut omettre :

- **for**, si on n'a besoin de la valeur de l'indice,
- **from**, si la valeur de début est 1,
- **by**, si le pas est 1,
- **to** ou **while**, mais pas les deux!...

### 48.3. Procédures

->	Définition d'une procédure ou fonction simple.	> f :=x->x**2*sin(x);
proc(param) local variables; instructions end	Définition d'une procédure de paramètres <i>param</i> donnés. Le résultat de la procédure est le dernier résultat calculé. Ici, on écrit une procédure appelée suite qui calcule $u_n$ pour une suite définie par $u_0 = a$ et par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{1}{u_n}}{2}$ .	> suite :=proc(a,n) local u ; u :=a ; from 1 to n do u :=(u+1/u)/2 od u end ;

Quand on écrit une procédure, il importe de bien distinguer :

- les variables Maple utilisées
- et leur sens mathématique.

## 49. Exemples de Programmes

Notons qu'aucun des programmes donnés ici en exemple n'est « protégé » contre une mauvaise utilisation avec des paramètres non pertinents...

### 49.1. Un programme très simple

On va maintenant créer une procédure qui calcule, pour un terme donné  $u_n$ , le terme suivant de la suite

$$u_{n+1} \text{ défini par : } u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{a}{u_n}}{2}.$$

On a donc deux paramètres : le terme donné de la suite, appelé  $u$  dans la procédure, et  $a$ .

```

suivant := proc(u, a)
local v;
v := u;
v := 1/2 * v + 1/2 * a/v;
v
end proc

```

### 49.2. Structure alternative

On va écrire une procédure qui calcule, pour une expression usuelle du second degré  $ax^2 + bx + c$  à coefficients réels, le nombre de ses racines réelles. On a donc trois paramètres  $a, b, c$ .

```

nbrac := proc(a, b, c)
local Δ, n;
Δ := b2 - 4 * a * c;
if 0 < Δ then n := 2 else if Δ = 0 then n := 1 else n := 0 end if end if;
n
end proc

```

### 49.3. Structure itérative « pour » à nombre de pas connu

Écrivons une procédure qui, pour la même suite qu'au 49.1., calcule, en calcul approché « flottant »,  $u_n$  pour  $u_0$ ,  $n$  et  $a$  paramètres donnés, que dans la procédure, on appellera respectivement :  $u, n, a$ .

```
suitef := proc(u, a, n)  
local i, v;  
  v := evalf(u);  
  for i to n do v := suivant(v, a) end do;  
  v  
end proc
```

### 49.4. Structure itérative « tant que » à nombre de pas inconnu

Il s'agit ici d'étudier le comportement des suites définies par :

- $u_0 = 0.1$ ,
- et la relation de récurrence :  $u_{n+1} = f(u_n)$ ,
- où  $f(x) = 4ax(1-x)$ .

Écrire une procédure de paramètres  $a$  et  $n$  qui calcule  $u_n$ .

```
suite := proc(a, n)  
local u;  
  u := .1;  
  to n do u := 4 * a * u * (1 - u) end do;  
  u  
end proc
```

Écrire maintenant une procédure qui calcule le premier  $n$  tel que  $|u_{n+1} - u_n| \leq d$ , de paramètres  $a$  et  $d$ , limitée à 500 itérations en cas de divergence ou de convergence très lente...

En sortie, on donnera  $n, u_n, u_{n+1}$  pour voir s'il semble y avoir convergence ou non.

Mathématiquement, l'observation de ces suites ne prouve ni leur convergence, ni leur divergence.

```
rang := proc(a, d)  
local i, u, v;  
  u := .1;  
  v := 4 * a * u * (1 - u);  
  for i to 500 while  $d < \text{abs}(u - v)$  do u := v; v := 4 * a * u * (1 - u) end do;  
  i, u, v  
end proc
```

### 49.5. Récurrence sur plusieurs rangs

On considère la suite de polynômes définie par :

- $P_0(x) = 1$
- $P_1(x) = x$
- $P_{n+2}(x) = xP_{n+1}(x) + P_n(x)$  pour  $n$  entier naturel

Écrire une procédure de paramètre  $n$ , qui calcule de façon réduite et ordonnée  $P_n$ .

```

poly := proc(n)
local u, v, w;
  u := 1; v := x;
  from 2 to n do w := expand(x*v + u, x); u := v; v := w end do;
  v
end proc

```

On remarquera le « from 2 » qui traduit simplement le fait que le premier polynôme qu'on calcule effectivement est  $P_2$ .

#### 49.6. Un exemple en algèbre linéaire

On a bien sûr déjà chargé le package `linalg`.

On prend ici une matrice  $A$  qui possède 3 valeurs propres simples : 1, 4 et 7.

On constitue la suite de vecteurs définie par un premier vecteur  $X_0$  et la relation :  $X_{n+1} = \frac{AX_n}{\|AX_n\|}$ .

On a donc une suite de vecteurs normés, sauf éventuellement le premier.

Quand cette suite converge, elle converge vers un vecteur propre, correspondant le plus souvent à la plus grande valeur propre en valeur absolue.

On a la matrice  $A$  et le vecteur de départ :

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X := [1, 1, 1]$$

On écrit donc une procédure à 2 paramètres  $A$  et  $X$  qui calcule la suite  $X_n$  jusqu'à ce que la norme de la différence de 2 vecteurs consécutifs soit assez petite.

Le nombre d'itérations est limité et on travaille bien sûr en « flottant » .

Ce qui donne :

```

valprop := proc(A, X)
local Y, Z;
  Y := evalf(evalm(eval(X)));
  Z := evalf(evalm(A &* Y/norm(A &* Y, 2)));
  to 30 while .00001 < norm(evalm(Z - Y), 2) do
    Y := evalm(Z);
    Z := evalf(evalm(A &* Y/norm(A &* Y, 2)))
  end do;
  evalf(norm(evalm('&*'(A, Z)), 2))
end proc

```

On essaye cette procédure :

```
> valprop(A,X);
```

```
6.999999999
```

Le résultat exact est 7.

## Index

<b>A</b>		
accroissements finis (inégalité)	35	
aire	49, 58, 83	
Alembert	14, 63, 65	
angles	83	
application	8	
— bijective	8	
— composition des –	9	
— injective	8	
— réciproque	8	
— surjective	8	
application linéaire	17	
— bijective	19	
— endomorphisme	18	
— image d'une –	18	
— image réciproque d'une –	18	
— injective	18, 19	
— matrice d'une –	19	
– changement de base	22	
— rang	19	
— surjective	19	
argument	12	
associativité	7, 9	
automorphisme	18	
<b>B</b>		
base		
— d'un espace vectoriel	16, 19	
— incomplète	16	
bijection	8, 19	
binôme (formule du)	12	
borne		
— inférieure	11	
— supérieure	11	
boule ouverte ou fermée	16	
branches infinies	88, 90	
<b>C</b>		
cardinal	8	
cercles		
— dans l'espace	95	
— dans le plan	95	
– cocyclicité	95	
changement de base	22	
changement de variable	52, 55, 58, 61	
Chasles (relation de)	49	
coefficients binomiaux	11	
coefficients de Fourier	67	
commutativité	7	
composition des applications	9	
cônes	101, 106	
— de révolution	108	
coniques	95–99	
— en polaires	96–98	
— identification	99	
continuité	32, 71	
— d'une application	32	
— d'une intégrale à paramètre	52, 56	
— sur un intervalle	32	
contour apparent	106, 108	
convergence	65	
— d'une intégrale généralisée	53	
— d'une série de Fourier	68	
— d'une série entière	65	
— d'une série numérique	61	
convexité	88	
coordonnées		
— cylindriques	60, 78	
— polaires	60, 78, 91	
— sphériques	60, 79	
corps	10	
— exemples	11	
courbes		
— centre de symétrie	88	
— convexité	88	
— de l'espace	94	
— en cartésiennes	87	
— en paramétriques	88	
— en polaires	91	
critère		
— d'équivalence	55, 63	
— de comparaison	54, 63	
– série-intégrale	64	
— de d'Alembert	63, 65	
— de Riemann	54, 63	
— des séries alternées	63	
croissances comparées	33	
cylindres	101, 104	
— de révolution	108	
cylindriques	60	
<b>D</b>		
d'Alembert	14, 63, 65	
dérivée		
— d'un produit	34	
— d'une composée	35	
dérivabilité	34	
— d'une intégrale à paramètre	52, 56	
déterminant	22, 81, 83, 84	
— d'un produit de matrices	23	
— d'une matrice inversible	23	
— d'une matrice triangulaire	22	
– par blocs	23	
— ordre 2 et 3	22	
— ordre quelconque	22	
développement		
— en série de Fourier	68	
— en série entière	66	
— limité	37–38	
diagonalisabilité	24	
— cond. nécessaire et suffisante	24	
— condition suffisante	24	
dichotomie	36	
dimension		
— d'un sous espace propre	23	
dimension finie	16	
distances	84	
diviseur	10	
division euclidienne	10, 14	
droites		
— de l'espace affine	83	
— du plan affine	81	
<b>E</b>		
élément		
— inversible	7	
— neutre	7	
ellipses	96	
ellipsoïde	99	
endomorphisme	18	
— noyau	23	
— orthogonal	29	
— stabilité par –	18	
— symétrique	26	
— trace	22	
ensemble	7	
— de définition	31, 56, 87	
— fini	8	
équations différentielles	73–75	
— aux dérivées partielles	75	
— linéaires	74	
– du premier ordre	74	
– du second ordre	75	
— non linéaires	74	
— recollement de solutions	73	
équations différentielles		
— solution en série entière	67	
équivalent	33	
espace vectoriel	15	
— base d'un –	16	
— de dimension finie	16	
— euclidien	25	
— exemples	17	
— préhilbertien	25	
— somme de –	15	
— somme directe de –	15	
— sous-espace	15	
— supplémentaires	15, 17, 84	
Euler (relation d')	12	
exponentielle	38	
— complexe	13	
extremums		
— d'une fn de plusieurs variables	72	
<b>F</b>		
famille		
— génératrice	16	
— libre	16	
faux problème	54	
fermé	16	
fonction	8	
— continue	32	
– par morceaux	33	
— convexe	88	
— définie par une intégrale		
– généralisée	56	
– simple	52	
— dérivable	34	
— de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux	34	
— de classe $\mathcal{C}^n$	34	
— de plusieurs variables	71–73	
– extremums	72	
— de Riemann	54	
— en escalier	33	
— limite d'une –	32	
— monotone	31	
— trigonométrique	38	
– hyperbolique	41	
– hyperbolique réciproque	42	
– réciproque	39	

— usuelle	38	<b>J</b>		matrice	
— variations d'une –	32			— antisymétrique	20
forme bilinéaire symétrique	24, 25	jacobien	73	— d'une application linéaire	21
forme linéaire	18	<b>L</b>		— de passage	21
forme quadratique	25			— de produit scalaire	25
formes indéterminées	33	limite		— inverse	21
formule du binôme	12	— d'une application	32	— jacobienne	73
fractions rationnelles	15	— d'une suite	30	— orthogonale	29
<b>G</b>		limites usuelles	33	— puissance de –	24
groupe	9	logarithme	38	— rang	20
— des unités	12	loi de composition interne	7	— symétrique	20, 26
— linéaire	29	<b>M</b>		— trace	22
— morphisme de –	10	maple	110–120	module	12
— orthogonal	29	— changevar	113	moindres carrés (méthode des)	27
— sous-groupe	9	— charpoly	114	Moivre (formule de)	12, 47
<b>H</b>		— collect	111	morphisme	
homomorphisme	17	— combine	111	— de groupe	10
hyperboles	97	— comparaisons	110	moyenne (formule de)	51
hyperboloïde		— constantes	111	multiple	10
— à deux nappes	100	— convert	111	<b>N</b>	
— à une nappe	100	— diff	113	négligeabilité	33
<b>I</b>		— display	116	Newton-Raphson (théorème de)	36
image		— dsolve	113	nombre premier	10
— d'une application linéaire	18, 19	— eigenvals	114	nombres complexes	
— d'une partie	8	— eigenvects	114	— racines	
— réciproque		— ensemble	112	— $n^{\text{èmes}}$	13
— d'une application linéaire	18	— eval	111	— carrées	12
— réciproque d'une partie	8	— evalb	111	norme	16
inégalité		— evalm	110, 111	— euclidienne	25
— dans les intégrales	51	— expand	111	noyau	18, 19, 23
— de Cauchy-Schwarz	26	— factor	111	<b>O</b>	
— de Schwarz	26, 51	— fonctions usuelles	112	ouvert	16
— de Taylor-Lagrange	36	— for	116, 118	<b>P</b>	
— des accroissements finis	35	— fsolve	113	paraboles	97
— triangulaire	11, 12, 26	— GramSchmidt	114	paraboloïde	
injection	8, 18	— if	116, 117	— elliptique	99
intégrabilité	54	— int	113	— hyperbolique	99
intégrale		— intervalle	112	Parseval (formule de)	70
— calcul approché	52	— intparts	113	partie	
— de Riemann	49–53	— leadterm	113	— bornée	16
— double et triple	57–61	— limit	113	— fermée	16
— généralisée	53–56	— linalg	114	— ouverte	16
— impropre	53–56	— linsolve	113	partie entière	10, 11
— simple	49–53	— liste	112	plan tangent	93
intégration		— matrix	114	plans	
— de séries	70	— norm	114	— de l'espace affine	82
— par parties	52, 55	— normal	112	point	
inverse		— opérations		— d'inflexion	88, 90
— d'un produit de matrices	21	— sur les matrices	110	point critique	72
— d'une matrice	21	— usuelles	110	point stationnaire	89
— d'une transposée	21	— parfrac	111	polaires	60
isométries	85–87	— plot	115	polynôme	
— affines		— plot3d	115	— caractéristique	23
— de l'espace	87	— proc	117–120	— divisibilité	14
— du plan	86	— product	111	— division euclidienne	14
— vectorielles		— series	113	— factorisation	14
— de l'espace	86	— simplify	112	— racines d'un –	14
— du plan	86	— solve	113	— scindé	14, 23
isomorphisme	18	— sort	111	primitives	48–49
		— spacecurve	115	— existence	49
		— subs	111	— fraction rationnelle	48
		— sum	111		
		— vector	114		
		— while	116, 118		

– en exponentielle	48	séries		– différentiels	76
– en radicaux	48	– d'intégrales	70	– autonomes	76
– trigonométrique	48	– de Fourier	67–70	– linéaires	19
– polynôme et exponentielle	48	– coefficients	68		
– usuelles	50	– convergence	68	<b>T</b>	
produit		– entières	65–67, 71	Taylor	
– de matrices	19	– développements usuels	66	– -Lagrange (inégalité)	36
– scalaire	80	– rayon de convergence	65	– -Young	36
– vectoriel	80	– géométriques	62	– avec reste intégral	36
produit scalaire	24	– numériques	61–65	trace d'une matrice	22
– dans une base orthonormale	25	– numériques positives	63	transposée	20
produit vectoriel	83, 84	– somme de –	64	triangle de Pascal	11
projecteur	18, 26, 84	similitude	13	triangularisation	24
projection		similitude directe	87	trigonalisation	24
– orthogonale	26	somme de Riemann	52	trigonométrie	46–47
prolongement par continuité	35	somme de sous espaces vectoriels	15	– arc double	47
		sous-espace propre	23	– fonctions réciproques	47
<b>Q</b>		sphériques	60	– formule de Moivre	47
quadriques	99–103	sphères	95	– pour le calcul intégral	47
– dégénérées	101	suite	30	– produits en sommes	47
– équations réduites	99	– équivalentes	30	– sommes d'arcs	47
– identification	102	– adjacentes	31	– sommes en produits	47
– géométrique	101	– bornée	30	– symétries	46
		– convergente	30	trois conditions (théorème des)	51, 55
<b>R</b>		– croissante majorée	31		
réduction d'un endomorphisme	23	– et série	30	<b>V</b>	
rang	17	– limite d'une –	30	valeur propre	23
– théorème du –	19	– récurrente	31	valeurs intermédiaires (th. des –)	32
Rolle (théorème de)	35	– linéaire	31	vecteur accélération	89
rotations		– sous-suite	30	– en polaires	93
– vectorielles		– vectorielle	30	vecteur propre	23
– de l'espace	86	supplémentaires (sous esp. vect.)	15, 17	vecteur vitesse	89
– du plan	86	surfaces	99–109	– en polaires	92
		– de révolution	103	vissage	87
<b>S</b>		– plan tangent	93	volume	58, 83
Schmidt (procédé de –)	26	surjection	8		
Schwarz (théorème de)	72	symétrie		<b>Z</b>	
semblables	22	– centrale	86	zéro d'une fonction	14, 36
		– orthogonale	85–87		
		symétries	18, 84		
		systèmes			